I. CREANGĂ C. REISCHER D. SIMOVICI

introducere algebrică în informatică

*

teoria automatelor

introducere algebrică în informatică

teoria automatelor

dr. doc. I. CREANGĂ
profesor universitar

dr. C. REISCHER
profesor universitar

ing. D. SIMOVICI
lector universitar

Introducere algebrică în informatică
*
teoria automatelor

EDITURA JUNIMEA IAŞI
1973

Coperta: P. OLGA

PREFAŢĂ

Dezvoltarea impetuoasă a tehnicii în ultimele decenii a generat apariţia unor discipline de frontieră situate între matematică şi tehnică. Una dintre acestea, informatica, *a devenit astăzi o importantă forţă de producţie, un bun al specialiştilor de profesii de cele mai diferite: matematicieni, ingineri, lingvişti, economişti, medici, chimişti, biologi.*

Programul de construire al sistemului informatic naţional prevede pregătirea unor contingente numeroase de specialişti avînd atît o solidă pregătire teoretică cît şi practică. Acestei sarcini îi corespunde înfiinţarea unor şcoli de informaticieni la diverse nivele (în învăţămîntul liceal, superior şi post-universitar).

Lucrarea de faţă îşi propune să fie o modestă contribuţie la formarea literaturii de specialitate.

Teoria automatelor, *parte componentă a informaticii teoretice este o disciplină matematică cu caracter algebric. Apărută în ultimii 30 de ani, odată cu începuturile erei calculatoarelor, teoria automatelor a captat atenţia unui mare număr de matematicieni şi ingineri, devenind astăzi o disciplină constituită. Obiectul teoriei automatelor îl constituie studiul unor entităţi matematice numite automate, care au rezultat printr-un proces de abstractizare şi generalizare a proprietăţilor unor sisteme cibernetice „concrete" (sisteme de calcul, sisteme de reglare automată, sisteme biologice) precum şi a unor fenomene lingvistice.*

În legătură cu acesta, în teoria automatelor se disting două direcţii de cercetare: direcţia structurală, *care se ocupă cu proprietăţile algebrice ale „realizării" automatelor şi* direcţia lingvistică, *care studiază automatele concepute ca dispozitive de generare şi recunoaştere a unor limbaje construite formal.*

În ţara noastră ambele puncte de vedere, structural şi lingvistic sînt strălucit reprezentate de şcolile conduse de acad. Gr. C. Moisil şi respectiv de prof. S. Marcus.

Primul volum al lucrării „Introducere algebrică în informatică" vine să umple un gol în literatura românească de specialitate, ocupîndu-se în special de aspectele structurale ale teoriei automatelor.

Cartea se adresează în special matematicienilor şi inginerilor informaticieni, precum şi tuturor acelor interesaţi de perfecţionarea lor teoretică în domeniul informaticei. Cunoştinţele matematice necesare pentru parcurgerea acestei cărţi sînt conţinute în partea I, iar bibliografia foarte bogată vine în ajutorul acelora care vor să se iniţieze în problemele de cercetare ale acestei discipline.

Vom fi recunoscători tuturor acelora care prin sugestiile lor vor contribui la o eventuală îmbunătăţire a lucrării.

Autorii

Lista de notaţii principale

$\|M\|$	— cardinalul mulţimii M
$\cup'$	— reuniune disjunctă
$\varnothing$	— mulţimea vidă
$\mathcal{P}(M)$	— mulţimea părţilor lui M
$\mathcal{P}^*(M)$	— mulţimea părţilor nevide ale lui M
N^*	— mulţimea numerelor naturale fără zero
N	— mulţimea numerelor naturale
Z	— inelul întregilor
R	— corpul numerelor reale
$i = \overline{1, n}$	— indicele i ia valorile de la 1 la n
W^1	— monoidul ataşat semigrupului W
$W_1 \mid W_2$	— W_1 divide W_2
G/H	— grup cît
χ_E	— funcţia caracteristică a lui E
pr_j	— proiecţia j a unui produs cartezian sau a unei relaţii n-are
$f\|_M$	— restricţia aplicaţiei f la mulţimea M
$\ker f$	— echivalenţa nucleară a aplicaţiei f
1_M	— aplicaţia identică pe mulţimea M
ι_S	— relaţia nulă pe S
ω_S	— relaţia totală pe S
$[\ ]_\sigma$, $[\ ]$	— clase de echivalenţă
$\mathrm{Eq}(S)$	— laticea echivalenţelor pe S
$\mathrm{Eq}(S \mid S_1)$	— urma relaţiilor de echivalenţe din $\mathrm{Eq}(S)$ pe $S_1 \subseteq S$
$\widetilde{\mathrm{Eq}}(S)$	— laticea congruenţelor pe S
$\widetilde{\mathrm{Eqd}}(S)$	— laticea congruenţelor la dreapta pe S
A	— automat
I	— alfabet de intrare
O	— alfabet de ieşire
S	— mulţime de stări
i	— semnal de intrare
o	— semnal de ieşire
s	— stare
p, q	— cuvinte

$\widetilde{p}$ — cuvînt inversat
e — cuvînt nul
$l(p)$ — lungimea cuvîntului p
I^* — semigrupul liber generat de I
I^{*k} — mulţimea cuvintelor p din I^* cu $l(p) \leqslant k$
I^k — mulţimea cuvintelor p din I^* cu $l(p)=k$
f, f_t, f_s, f_p — funcţii de trecere
g, g_s, g_t, g_p — funcţii de ieşire
Aut (I, O) — mulţimea automatelor cu alfabet de intrare I şi alfabet de ieşire O
T — sistem tranziţional
B — bistabil
AB — automat binar
$\mathcal{R}$ — reţea de k-module
$\mathcal{N}$ — reţea abstractă
$S(A)$ — semiautomat ataşat automatului A
$M(A)$ — macroautomat ataşat automatului A
$\mathfrak{G}(A)$ — graful asociat automatului A
A/σ — automat cît
$A(\sigma)$ — automat ataşat congruenţei σ
$A(\varphi)$ — automat ataşat aplicaţiei φ
A^φ — automat canonic ataşat operatorului φ
$A(W)$ — automat ataşat semigrupului W
$W(A; s_0)$ — semigrup ataşat automatului A în starea s_0
χ — homomorfism de automate
Ψ — simulare de automate
Φ — semisimulare de automate
$A_1 \mid A_2$ — A_1 simulează A_2
$A_1 \perp A_2$ — A_1 suprasimulează A_2
Aut — categoria automatelor
Autd — categoria automatelor deterministe
Autf — categoria automatelor finite
$A_2 \times_{(\zeta, \eta)} A_1$ — cascada automatelor A_1 şi A_2 prin aplicaţiile ξ şi η
$A_1 \to A_2$ — gruparea în serie în sens Hartmanis-Stearns
$A_1 \parallel A_2$ — gruparea în paralel în sens Hartmanis-Stearns
$A_1 \bigoplus A_2$ — suma directă de automate
φ — operator
φ_p — stare a operatorului φ în cuvîntul p
γ_s — operator realizat în automat prin starea s
$\mathfrak{G}^\varphi$ — graful ataşat operatorului secvenţei φ
Secv (I, O) — mulţimea operatorilor secvenţiali pe I, O
E — eveniment
$\mathcal{R}(I)$ — mulţimea evenimentelor regulate din I
$\mathcal{L}$ — limbajul expresiilor regulate
$\alpha_{SS}, \alpha_{IS}, \alpha_{SO}, \alpha_{IO}$ — relaţii de asociere
■ — sfîrşit de demonstraţie.

PARTEA I

ELEMENTE DE ALGEBRĂ

§ I.0. INTRODUCEREA

Rolul primei părți „Elemente de algebră" este precizarea noțiunilor și rezultatelor algebrice folosite în această carte. Nu a fost în intenția autorilor să transforme această parte într-un curs de algebră, motiv pentru care s-a adoptat o formă concisă de prezentare.

Lectura atentă a materialului va ușura cititorului înțelegerea textului propriu-zis de teoria automatelor.

Recomandăm parcurgerea exemplelor, ele conținînd o serie de chestiuni importante precum și efectuarea pînă la capăt a unor raționamente lăsate cititorului, ca exerciții.

§ I. 1. MULȚIMI ȘI RELAȚII

Considerăm noțiunea de *mulțime** ca o noțiune primară; de asemenea noțiunea de *element* al unei mulțimi. De obicei o mulțime este descrisă printr-o proprietate sau mai multe proprietăți comune ale elementelor sale, de exemplu mulțimea numerelor 2, 4, 6 poate fi descrisă ca mulțimea numerelor pare mai mici decît 7 adică $\{2, 4, 6\} = \{k \mid k \text{ număr natural}, k = 2p, k < 7\}$. Mulțimile vor fi notate, în general, cu literele mari ale alfabetului latin, iar elementele cu litere mici. Faptul că m este un element al mulțimii M se notează cu $m \in M$ și se citește *„m aparține mulțimii M"* sau *„m este conținut în M"*. Dacă a nu este un element al mulțimii M notăm acest lucru prin $a \notin M$.

---

* există și prezentări axiomatice ale teoriei mulțimilor (vezi de exemplu Cohn. P.M. [1]).

Definiția I.1.1. O *submulțime* sau o parte M_1 *a mulțimii* M este o mulțime pentru care oricare ar fi $m_1 \in M_1$ avem $m_1 \in M$. Se notează acest lucru prin $M_1 \subseteq M$ și se citește „mulțimea M_1 este inclusă în mulțimea M".

Dacă M_1 este o submulțime a mulțimii M, dar există cel puțin un element $m \in M$, cu $m \notin M_1$ atunci M_1 este o *submulțime strictă* a lui M și vom nota $M_1 \subset M$ sau $M_1 \subset M$.
$\neq$

Definiția I.1.2. Două mulțimi M_1 și M_2 sînt *egale* dacă $M_1 \subseteq M_2$ și $M_2 \subseteq M_1$. Notăm $M_1 = M_2$.

Observația I.1.1. Se consideră *mulțimea vidă* (mulțimea care nu conține nici un element) pe care o notăm cu $\varnothing$. Prin convenție $\varnothing \subseteq M$, oricare ar fi mulțimea M.

Vom considera și mulțimea tuturor submulțimilor mulțimii M, $\mathcal{P}(M)$, iar $\mathcal{P}^*(M)$ este mulțimea $\mathcal{P}(M)$ din care am exclus submulțimea vidă.

Definiția I.1.3. Fie $M_1, M_2 \in \mathcal{P}(M)$

Reuniunea mulțimilor M_1 și M_2 este mulțimea $M_1 \cup M_2$:

$$M_1 \cup M_2 = \{m \mid m \in M_1 \text{ sau } m \in M_2\}.$$

Intersecția mulțimilor M_1 și M_2 este mulțimea $M_1 \cap M_2$:

$$M_1 \cap M_2 = \{m \mid m \in M_1 \text{ și } m \in M_2\}.$$

Diferența mulțimilor M_1 și M_2 este mulțimea $M_1 \setminus M_2$:

$$M_1 \setminus M_2 = \{m \mid m \in M_1 \text{ și } m \notin M_2\}.$$

Complementara mulțimii M_1 este mulțimea M_1^c

$$M_1^c = \{m \mid m \notin M_1\}.$$

Propunem cititorului să demonstreze următoarele egalități de mulțimi:

1) $M_1 \cup (M_2 \cup M_3) = (M_1 \cup M_2) \cup M_3$ $\quad M_1 \cap (M_2 \cap M_3) = (M_1 \cap M_2) \cap M_3$ (asociativitate)

2) $M_1 \cup M_2 = M_2 \cup M_1$ $\quad M_1 \cap M_2 = M_2 \cap M_1$ (comutativitate)

3) $M_1 \cup M_1 = M_1$ $\quad M_1 \cap M_1 = M_1$, (idempotență)

4) $M_1 \cup (M_2 \cap M_1) = M_1$ $\quad M_1 \cap (M_2 \cup M_1) = M_1$, (absorbție)

5) $M_1 \cup (M_2 \cap M_3) = (M_1 \cup M_2) \cap (M_1 \cup M_3)$, $M_1 \cap (M_2 \cup M_3) = (M_1 \cap M_2) \cup (M_1 \cap M_3)$, (distributivitate)

6) $(M_1^c)^c = M_1$ (involutivitatea complementarierii)

7) $(M_1 \cup M_2)^c = M_1^c \cap M_2^c$ $(M_1 \cap M_2)^c = M_1^c \cup M_2^c$ (proprietăţile lui De Morgan)

8) $M_1 \cup M_1^c = M$ $M_1 \cap M_1^c = \emptyset$,

9) $M_1 \cup \emptyset = M_1$ $M_1 \cap \emptyset = \emptyset$,

10) $M_1 \cup M = M$ $M_1 \cap M = M_1$.

Definiţia I. 1.4. *Produsul cartezian* al n mulţimi $M_1, M_2, \ldots, M_n$ este mulţimea $M_1 \times M_2 \times \ldots \times M_n = \prod_{j=1}^{n} M_j$ formată din totalitatea n-uplelor ordonate $(m_1, m_2, \ldots, m_n)$, unde $m_j \in M_j$, $j = \overline{1, n}$.

Dacă $M_1 = \ldots = M_n = M$ obţinem puterea carteziană a n-a a mulţimii M, $M \times \ldots \times M = M^n$.

Fie $M', M'' \in \mathcal{P}(M)$. *Reuniunea disjunctă* a mulţimilor M' şi M'' este mulţimea $M' \cup' M'' = (M' \times \{1\}) \cup (M'' \times \{2\})$, care realizează o „dedublare" a elementelor comune celor două mulţimi.

Fie acum $M_1, \ldots, M_n$, n mulţimi oarecare nevide.

Definiţia I. 1.5. *O relaţie n-ară* α pe mulţimile $M_1, \ldots, M_n$ este o submulţime a produsului cartezian $M_1 \times \ldots \times M_n$, $\alpha \subseteq M_1 \times \ldots \times M_n$. Submulţimea vidă a acestui produs este *relaţia vidă* n-ară.

Proiecţia j-a a relaţiei n-are α este mulţimea

$$\mathrm{pr}_j \alpha = \{m_j \mid \exists m_k \in M_k, \quad k \in \{1, \ldots, n\} \setminus \{j\}, \quad (m_1, \ldots, m_j, \ldots, m_n) \in \alpha\}.$$

În cazul $n = 2$ obţinem *relaţiile binare*, care vor fi utilizate mult în continuare.

Definiţia I. 1.6. Relaţia α *implică* relaţia β, $\alpha \leqslant \beta$, dacă $\alpha \subseteq \beta$.

Definiţia I. 1.7. Fie M_1, M_2, M_3 trei mulţimi nevide şi $\alpha \subseteq M_1 \times M_2$, $\beta \subseteq M_2 \times M_3$ două relaţii binare. *Relaţia produs* a relaţiilor α şi β este relaţia $\gamma = \alpha\beta \subseteq M_1 \times M_3$ unde $(m_1, m_3) \in \gamma$ dacă şi numai dacă există $m_2 \in M_2$ astfel ca $(m_1, m_2) \in \alpha$ şi $(m_2, m_3) \in \beta$.

Observaţia I.1.2. Introducerea relaţiei vide asigură că produsul de relaţii este totdeauna definit.

Produsul de relaţii are proprietatea de asociativitate:

$$\alpha(\beta\gamma) = (\alpha\beta)\gamma,$$

precum şi proprietatea de distributivitate faţă de reuniunea de mulţimi şi de subdistributivitate faţă de intersecţie:

$$\alpha\left(\bigcup_{j \in J} \beta_j\right) = \bigcup_{j \in J} (\alpha\beta_j),$$

$$\alpha\left(\bigcap_{j \in J} \beta_j\right) \leqslant \bigcap_{j \in J} (\alpha\beta_j).$$

Definiția I.1.8. *Relația inversă* a relației $\alpha \subseteq M_1 \times M_2$ este relația $\alpha^{-1} \subseteq M_2 \times M_1$ cu $(m_2, m_1) \in \alpha^{-1}$ dacă și numai dacă $(m_1, m_2) \in \alpha$.

Să observăm că $(\alpha^{-1})^{-1} = \alpha$ și $(\alpha\beta)^{-1} = \beta^{-1}\,\alpha^{-1}$.

Definiția I.1.9. *Relația complementară* a relației $\alpha \subseteq M_1 \times M_2$ este relația $\alpha^c \subseteq M_1 \times M_2$ pentru care $(m_1, m_2) \in \alpha^c$ dacă și numai dacă $(m_1, m_2) \notin \alpha$.

Să presupunem $M_1 = M_2 = M$. Ne vom ocupa de relațiile binare pe $M \times M$ pe care le vom numi pe scurt relații binare pe M. În mulțimea relațiilor pe M se disting relațiile descrise în:

Definiția I.1.10. *Relația identică (nulă)* ι_M este mulțimea perechilor (m, m), $m \in M$; *relația totală* ω_M este mulțimea $M \times M$.

Definiția I.1.11. Relația $\alpha \subseteq M \times M$ are proprietatea de:

a) *reflexivitate*, dacă $\iota_M \leqslant \alpha$,

b) *simetrie*, dacă $\alpha^{-1} = \alpha$,

c) *antisimetrie*, dacă $\alpha \cap \alpha^{-1} \leqslant \iota_M$,

d) *tranzitivitate*, dacă $\alpha\alpha \leqslant \alpha$.

Definiția I.1.12. O *relație de echivalență* pe M este o relație reflexivă, simetrică și tranzitivă. Vom nota cu $\mathrm{Eq}(M)$ mulțimea tuturor echivalențelor pe mulțimea M.

Exemplul I. 1.1. Fie Z mulțimea numerelor întregi și $n \in Z$. Două numere n_1 și n_2 sînt congruente modulo n dacă și numai dacă $n_1 - n_2$ este un multiplu de n. Se notează $n_1 \equiv n_2 \pmod{n}$.

Relația binară „$\equiv_n$" $\subseteq Z \times Z$ dată de

$$„\equiv_n" = \{(n_1, n_2) \mid n_1 \equiv n_2 \pmod{n}\},$$

este o echivalență, cum se constată imediat.

Fie M o mulțime și α o echivalență pe M.

Definiția I. 1.13. *Clasa de echivalență* față de echivalența α a elementului $m \in M$ este mulțimea $[m]_\alpha = \{m_1 \mid (m, m_1) \in \alpha\}$, iar orice $m_1 \in [m]_\alpha$ se numește *reprezentant al clasei* $[m]_\alpha$.

Mulțimea cît M/α este mulțimea $\{[m]_\alpha \mid m \in M\}$.

Să observăm că dacă $(m_1, m_2) \notin \alpha$ atunci $[m_1]_\alpha \cap [m_2]_\alpha = \varnothing$ iar $\bigcup_{m \in M} [m]_\alpha = M$.

Exemplul I.1.2. Mulțimea cît $Z|_{\equiv_n}$ conține n clase de echivalență și anume o clasă $[m]_{\equiv_n}$ conține toate numerele care dau același rest la împărțirea cu n ca și m. $Z|_{\equiv_n}$ se mai numește *mulțimea claselor de resturi modulo n.*

Definiția I.1.14. *O relație de ordine parțială* α pe M este o relație reflexivă, antisimetrică și tranzitivă. Perechea (M, α) se numește *mulțime parțial ordonată*.

Dacă $M_1 \subseteq M$ relația de ordine parțială $\alpha_1 = \alpha \cap (M_1 \times M_1)$ este *urma relației* α *pe mulțimea* M_1 și (M_1, α_1) este de asemenea o mulțime parțial ordonată.

Exemplul I.1.3. Relația de incluziune pe mulțimea $\mathcal{P}(M)$ este o relație de ordine parțială.

Exemplul I.1.4. Divizibilitatea între numerele naturale este o relație de ordine parțială.

Definiția I.1.15. O relație de *ordine totală* α pe M este o relație de ordine parțială cu proprietatea $\alpha \cup \alpha^{-1} = \omega_M$, cu alte cuvinte oricare ar fi $m_1, m_2 \in M$ avem $(m_1, m_2) \in \alpha$ sau $(m_2, m_1) \in \alpha$. Perechea (M, α) se numește *mulțime total ordonată* sau *lanț*.

Exemplul I.1.5. Relația obișnuită de ordine pe mulțimea numerelor reale este o relație de ordine totală.

Fie (M, α) o mulțime parțial ordonată și $M_1 \subseteq M$.

Definiția I.1.16. *Mulțimea majoranților* submulțimii M_1 este mulțimea

$$M_1^s = \{m \mid \forall\, m_1 \in M_1, \quad (m_1, m) \in \alpha\},$$

iar *mulțimea minoranților* mulțimii M este mulțimea

$$M_1^i = \{m \mid \forall m \in M_1, \quad (m, m_1) \in \alpha\}.$$

Definiția I.1.17. $m_1 \in M_1$ este un *element maximal (minimal)* al mulțimii M_1 dacă nu există $m_2 \in M_1$ cu $(m_1, m_2) \in \alpha$ $((m_2, m_1) \in \alpha)$.

Observația I.1.3. Mulțimile $M_1 \cap M_1^s$ și $M_1 \cap M_1^i$ conțin cel mult un element.

Într-adevăr, dacă $m', m'' \in M_1 \cap M_1^s$ atunci cum $m' \in M_1$, $m'' \in M_1^s (m', m'') \in \alpha$. Apoi cum $m' \in M_1^s$ și $m'' \in M_1$ avem $(m'', m') \in \alpha$, de unde, din antisimetria relației α rezultă $m' = m''$.

Similar se arată că $M_1 \cap M_1^i$ conține cel mult un element.

Definiția I.1.18. *Cel mai mare (mic) element al mulțimii* M_1 este elementul $m_1 \in M_1 \cap M_1^s (m_2 \in M_1 \cap M_1^i)$, în cazul în care $M_1 \cap M_1^s \neq \emptyset$ $(M_1 \cap M_1^i \neq \emptyset)$.

Observația I.1.4. Cel mai mare (mic) element al mulțimii M_1, în cazul în care există, este un element maximal (minimal) al acestei mulțimi.

Deoarece, în baza observației I.1.3. mulțimile $M_1^s \cap (M_1^s)^s$ și $M_1^i \cap (M_1^i)^i$ au cel mult un element, este justificată:

Definiţia I. 1.19. Numim *supremum (infimum)* al mulţimii M_1 elementul $m \in M_1^s \cap (M_1^s)^t (m \in M_1^i \cap (M_1^i)^s)$, în cazul în care mulţimea $M_1^s \cap (M_1^s)^t$, $(M_1^i \cap \cap (M_1^i)^n)$ este nevidă. Notăm supremul (infimumul) mulţimii M_1 cu sup M_1 (inf M_1).

Observaţia I.1.5. În timp ce o mulţime poate avea mai multe elemente maximale şi minimale ea poate avea cel mult un supremum şi un infimum precum şi un cel mai mare şi un cel mai mic element.

Propunem cititorului să arate că dacă o mulţime are un cel mai mare element (cel mai mic element) el coincide cu supremumul (infimumul) acelei mulţimi.

De asemenea să arate că pentru o parte R_1 a mulţimii numerelor reale $r_1 = \sup R_1$ ($r_2 = \inf R_1$) dacă şi numai dacă au loc următoarele proprietăţi:

a) $\forall r \in R_1$, $r \leqslant r_1$ ($r \geqslant r_2$),

b) $\forall \varepsilon \geqslant 0$, $\exists r' \in R$, astfel ca $r' \geqslant r_1 - \varepsilon (r' \leqslant r_2 + \varepsilon)$.

Fie (M_j, α_j), $j = 1, 2$ două mulţimi parţial ordonate.

Definiţia I. 1.20. *Produsul cardinal* al mulţimilor parţial ordonate (M_j, α_j), $j = 1, 2$ este mulţimea parţial ordonată $(M_1 \times M_2, \alpha)$ unde $((m_1, m_2), (m_1', m_2')) \in \alpha$ dacă şi numai dacă $(m_1, m_1') \in \alpha_1$ şi $(m_2, m_2') \in \alpha_2$.

§ I. 2. APLICAŢII

Fie α o relaţie, $\alpha \subseteq M_1 \times M_2$ care are următoarele proprietăţi:

a) $\mathrm{pr}_1 \alpha = M_1$,

b) dacă $(m_1, m_2') \in \alpha$, $(m_1, m_2'') \in \alpha$ atunci $m'_2 = m_2''$, adică $\alpha^{-1}\alpha \leqslant \iota_{M_2}$.

Definiţia I.2.1. O *aplicaţie* f de la mulţimea M_1 la mulţimea M_2, $f : M_1 \to M_2$ ($M_1 \xrightarrow{f} M_2$) este o relaţie pe M_1, M_2 cu proprietăţile a) şi b).

Dacă $(m_1, m_2) \in f$ vom scrie în mod obişnuit $m_2 = f(m_1)$ şi vom numi m_2 *imaginea lui* m_1 prin aplicaţia f, iar m_1 constituie pentru m_2 o *preimagine*.

M_1 este *domeniul de definiţie* al aplicaţiei f, M_2 *codomeniul* aplicaţiei f.

Mulţimea aplicaţiilor de la M_1 la M_2 va fi notată cu $M_2^{M_1}$.

Definiţia I. 2.2. Fie $M_1' \subseteq M_1$. *Imaginea lui* M_1' *prin aplicaţia* f este mulţimea $f(M_1') = \{m_2' \mid \exists m_1' \in M_1', m_2' = f(m_1')\}$, iar *imaginea aplicaţiei* f este mulţimea $\mathrm{Im} f = f(M_1)$.

Teorema I. 2.1. *Fie f' și f'' două aplicații, $f' : M_1 \to M_2$ și $f'' : M_2 \to M_3$. Compunerea relațiilor f' și f'' este o aplicație de la M_1 la M_3 pe care o vom nota $f''f'$ (în ordinea inversă celei utilizate la scrierea compunerii de relații); $f''f' : M_1 \to M_3$.*

Demonstrație. Proprietatea a) este evident verificată. Fie acum (m_1, m_3'), $(m_1, m_3'') \in f''f'$. Atunci deoarece f' este o aplicație există m_2 astfel ca $(m_1, m_2) \in f'$, $(m_2, m_3') \in f''$, $(m_2, m_3'') \in f''$, de unde $m_3' = m_3''$ deoarece f'' este o aplicație. ■

Definiția I. 2.3. *Aplicația identică* 1_M este aplicația definită de relația ι_M, care are proprietățile a) și b), iar aplicația $f: M_1 \to M_2$ cu $f(m) = m_2, \forall m \in M_1$ poartă numele de *aplicație constantă.*

Propunem cititorului să verifice că oricare ar fi aplicația $f : M_1 \to M_2$ avem $1_{M_2} f = f 1_{M_1} = f$.

Să observăm că pentru aplicația f, relația f^{-1} nu este totdeauna o aplicație. Dacă f^{-1} este o aplicație ea se numește *aplicația inversă a lui f.* Avem $ff^{-1} \leqslant 1_{M_2}$.

Definiția I.2.4. *Coimaginea aplicației f* este mulțimea $\operatorname{Coim} f = \operatorname{pr}_2 f^{-1}$. Dacă f^{-1} este o aplicație, $\operatorname{Coim} f = \operatorname{Im} f^{-1}$.

Definiția I.2.5. *Restricția aplicației* $f : M_1 \to M_2$ la submulțimea $M_1' \subseteq M_1$ este aplicația $f|_{M_1'} : M_1' \to M_2$ pentru care

$$f|_{M_1'}(m_1') = f(m_1')$$

iar f este *extensia aplicației* $f|_{M_1'}$ la M_1.

Definiția I.2.6. *Corestricția aplicației* $f : M_1 \to M_2$ la submulțimea $M_2' \subseteq M_2$ este aplicația $f' : M_1' \to M_2'$ unde $M_1' = \{m_1' \mid \exists\, m_2' \in M_2', f(m_1') = m_2'\}$ iar $f'(m_1') = f(m_1')$.

Definiția I.2.7. Aplicația $f : M_1 \to M_2$ este:

1) *aplicație injectivă* (sau *injecție*, sau *aplicație biunivocă*), dacă din $f(m_1') = f(m_1'')$ rezultă $m_1' = m_1''$.

2) *aplicație surjectivă* (sau *surjecție*) dacă oricare ar fi $m_2 \in M_2$ există $m_1 \in M_1$ cu $m_2 = f(m_1)$.

3) *aplicație bijectivă* (sau *bijecție*) dacă este aplicație injectivă și surjectivă.

Definiția I.2.8. *Echivalența nucleară* a aplicației $f : M_1 \to M_2$ sau pe scurt, *nucleul aplicației f* este relația $\ker f \subseteq M_1 \times M_1$ dată de $\ker f = \{(m_1', m_1'') \mid f(m_1') = f(m_1'')\}$*

* ker sînt primele litere ale cuvîntului englezesc kernel (nucleu)

Obsevația I.2.1. Aplicația f este injectivă dacă și numai dacă $\ker f = \iota_{M_1}$.

Observația I.2.2. Injectivitatea aplicației f echivalează cu egalitatea $f^{-1}f = 1_{M_1}$, iar surjectivitatea cu $ff^{-1} = 1_{M_2}$; f este bijectivă dacă și numai dacă $ff^{-1} = 1_{M_2}$ și $f^{-1}f = 1_{M_1}$.

Definiția I.2.9. *Funcția caracteristică* a submulțimii $M_1 \subseteq M$ este aplicația $\chi_{M_1} : M \to \{0, 1\}$ dată de

$$\chi_{M_1}(m) = \begin{cases} 0, \text{ dacă } m \notin M_1 \\ 1, \text{ dacă } m \in M_1. \end{cases}$$

Propunem cititorului să verifice următoarele proprietăți ale funcției caracteristice.

1) $(m', m'') \in \ker \chi_{M_1}$ dacă și numai dacă m', m'' aparțin simultan mulțimii M_1 sau mulțimii $M \setminus M_1$.

2) $\chi_{M_1}(m)\ \chi_{M_2}(m) = \chi_{M_1 \cap M_2}(m)$,

3) $\chi_{M_1}(m) + \chi_{M_2}(m) = \chi_{M_1 \cap M_2}(m) + \chi_{M_1 \cup M_2}(m)$,

4) Dacă $M_1 \subseteq M_2$, $\chi_{M_1}(m) \leqslant \chi_{M_2}(m)$.

Definiția I.2.10. *O indexare a mulțimii M cu mulțimea de indici J* este o aplicație bijectivă $f : J \to M$. De obicei elementul $f(j) \in M$ se notează cu m_j.

Fie (M_1, α_1), (M_2, α_2) două mulțimi parțial ordonate.

Definiția I. 2.11. $f : M_1 \to M_2$ este o *aplicație izotonă (antitonă)* dacă din $(m_1, m_1') \in \alpha_1$ avem $(f(m_1), f(m_1')) \in \alpha_2$ $((f(m_1), f(m_1')) \in \alpha_2^{-1})$.

Să considerăm mulțimile $M_1, \ldots, M_n, M$.

Definiția I. 2.12. O *operație n-ară* este o aplicație $h : M_1 \times M_2 \times \ldots \times M_n \to M$. Dacă $M_1 = M_2 = \ldots = M_n = M$ obținem o *operație internă*, iar pentru $n = 2$ obținem *operațiile binare*.

§ I. 3. NOȚIUNEA DE UNIVERS

Definiția I.3.1. Un *univers* $\mathfrak{U}$ este o mulțime de mulțimi care satisface următoarele proprietăți:

a) dacă $M \in \mathfrak{U}$ atunci $M \subset \mathfrak{U}$,

b) dacă $M_1, M_2 \in \mathfrak{U}$ atunci $\{M_1, M_2\} \in \mathfrak{U}$,

c) dacă $M \in \mathfrak{U}$ atunci $\mathcal{P}(M) \in \mathfrak{U}$,

d) dacă $J \in \mathfrak{U}$ și $f : J \to \mathfrak{U}$ atunci $\bigcup_{j \in J} f(j) \in \mathfrak{U}$, adică reuniunea unei familii de elemente din $\mathfrak{U}$ indexată după o mulțime din $\mathfrak{U}$ aparține lui $\mathfrak{U}$.

Observația I.3.1. Dacă $M \in \mathfrak{U}$ și $M_1 \subseteq M$ atunci $M_1 \in \mathfrak{U}$. Rezultă imediat din condițiile c) și a). În particular $\emptyset \in \mathfrak{U}$. Dacă $M \in \mathfrak{U}$ atunci $\{M\} \in \mathfrak{U}$, deoarece $\{M\} \subset \mathcal{P}(M)$.

Teorema I.3.1. *Dacă universul $\mathfrak{U}$ este nevid atunci pentru $\forall\, n \in N$ există o mulțime M din $\mathfrak{U}$ cu n elemente.*

Demonstrație. Vom proceda prin inducție după n. Pentru $n = 0$ propoziția este adevărată deoarece $\emptyset \in \mathfrak{U}$.

Să presupunem că are loc pentru n. Fie atunci $M \in \mathfrak{U}$ și M cu n elemente. Conform proprietății c) mulțimea $\mathcal{P}(M)$ (care are 2^n elemente) aparține lui $\mathfrak{U}$. Deoarece $2^n \geqslant n + 1$, $\mathcal{P}(M)$ conține o submulțime cu $n + 1$ elemente care va aparține lui $\mathfrak{U}$. ■

Teorema I.3.2. *Dacă M_1, $M_2 \in \mathfrak{U}$ atunci $M_1 \cup M_2 \in \mathfrak{U}$.*

Demonstrație. În baza teoremei precedente $\{1, 2\} \in \mathfrak{U}$. Definind $f : \{1, 2\} \to \mathfrak{U}$ prin $f(j) = M_j$, obținem conform punctului d) $M_1 \cup M_2 \in \mathfrak{U}$. ■

Observația I.3.2. Teorema precedentă rămîne adevărată și pentru orice număr finit de mulțimi.

Observația I.3.3. Fie $(m_1, m_2) \in M_1 \times M_2$, unde $M_1, M_2 \in \mathfrak{U}$. Dacă concepem perechea ordonată (m_1, m_2) ca fiind mulțimea $\{\{m_1\}, \{m_1, m_2\}\}$, atunci în baza proprietății b) și a observației I.3.1 obținem $(m_1, m_2) \in \mathfrak{U}$.

Teorema I.3.3. *Fie M_1, $M_2 \in \mathfrak{U}$; atunci $M_1 \times M_2 \in \mathfrak{U}$.*

Demonstrație. Dacă $m_1 \in M_1 \in \mathfrak{U}$ și $m_2 \in M_2 \in \mathfrak{U}$, conform observației I.3.3 avem $(m_1, m_2) \in \mathfrak{U}$ și deci $\{(m_1, m_2)\} \in \mathfrak{U}$. Apoi $\{m_1\} \times M_2 = \bigcup_{m_2 \in M_2} \{(m_1, m_2)\} \in \mathfrak{U}$ conform proprietății d), deoarece putem defini funcția $f : M_2 \to \mathfrak{U}$ cu $f(m_2) = \{(m_1, m_2)\}$.

În sfîrșit $M_1 \times M_2 = \bigcup_{m_1 \in M_1} \{\{m_1\} \times M_2\} \in \mathfrak{U}$ în baza acelorași motive. ■

Teorema I.3.4. *Dacă M_1, $M_2 \in \mathfrak{U}$ atunci $M_2^{M_1} \in \mathfrak{U}$.*

Demonstrație. Din teorema I.3.3. și din proprietatea c) avem $\mathcal{P}(M_1 \times M_2) \in \mathfrak{U}$ și ca atare, deoarece orice aplicație $f : M_1 \to M_2$ este o relație (vezi definiția I.2.1) avem $M_2^{M_1} \subseteq \mathcal{P}(M_1 \times M_2)$, adică $M_2^{M_1} \in \mathfrak{U}$. ■

Teorema I.3.5. *Dacă $\{M_j \mid j \in J\} \subseteq \mathfrak{U}$, $J \in \mathfrak{U}$ atunci $\bigcap_{j \in J} M_j \in \mathfrak{U}$.*

Demonstrație. Se obține din observația I.3.1 deoarece $\bigcap_{j \in J} M_j \subseteq M_{j_1}$. ■

Teorema I.3.6. *Dacă* $\{M_j | j \in J\} \in \mathfrak{U}$, $J \in \mathfrak{U}$ *atunci* $\bigcup_{j \in J}' M_j \in \mathfrak{U}$.

Demonstrație. Deoarece $\bigcup_{j \in J}' M_j = \bigcup_{j \in J} \{M_j \times \{j\}\}$ aplicînd observația I.3.1 teorema I.3.3 și proprietatea d) obținem rezultatul dorit. ■

Definiția I.3.2. Orice parte a unui univers $\mathfrak{U}$ se numește $\mathfrak{U}$-*clasă* sau pe scurt *clasă*.

Observația I.3.4. Orice mulțime este o clasă (vezi proprietatea a)), dar nu orice clasă este o mulțime.

Teorema I.3.7. *Fie* $\{M_j | j \in J\}$ *o familie de mulțimi din* $\mathfrak{U}$ *indexată după o mulțime* $J \in \mathfrak{U}$. *Atunci produsul cartezian* $\prod_{j \in J} M_j = \{f | f : J \to \bigcup_{j \in J} M_j$ *astfel ca* $f(j) \in M_j\}$ *este o mulțime din* $\mathfrak{U}$.

Demonstrație. Deoarece $\prod_{j \in J} M_j \subseteq (\bigcup_{j \in J} M_j)^J$, în baza proprietății d), a teoremei I.3.4 și a observației I.3.1 avem $\prod_{j \in J} M_j \in \mathfrak{U}$. ■

Observația I.3.5. Dacă $J = \{1, 2, ..., n\}$ obținem produsul cartezian al mulțimilor $M_1, ..., M_n$ (definiția I.1.4) concepînd elementul $(m_1, ..., m_n)$ ca o aplicație $m : \{1, ..., n\} \to \bigcup_{k=1}^{n} M_k$ cu $m(k) = m_k \in M_k$, $k = \overline{1, n}$.

Definiția I.3.3. Fie $\{M_j | j \in J\}$ o familie de mulțimi din $\mathfrak{U}$ cu $J \in \mathfrak{U}$. *Proiecția (injecția) canonică* $p_j(i_j)$ este aplicația $p_j : \prod_{k \in J} M_k \to M_j (i_j : M_j \to \bigcup_{k \in J}' M_k)$ dată prin $p_j(f) = f(j), \forall f \in \prod_{k \in J} M_k (i_j(m_j) = (m_j, j), \forall m_j \in M_j)$.

Observația I.3.6. Singurele universuri cunoscute în matematica actuală sînt universul vid și universul mulțimilor finite. Propunem cititorului să arate că acesta din urmă conține mulțimile N, N^*, Z, Q, R, C.

Vom admite un principiu care stă la baza teoriei mulțimilor cunoscut sub numele de axioma alegerii.

Axioma alegerii. Oricare ar fi mulțimea $M \neq \emptyset$ există o funcție $f : \mathcal{P}^*(M) \to M$ numită *funcție de alegere.*

Pentru enunțuri echivalente cu această axiomă, precum și pentru rolul ei în matematică vezi [I. Vaisman [1]].

Vom cita numai unul din aceste enunțuri și anume:

Orice mulțime parțial ordonată (M, α) posedă elemente maximale.

Pentru a evalua „numărul" de elemente ale unei mulțimi M introducem *relația de echipotență* ε între elementele universului nevid $\mathfrak{U}$.

Definiția I.3.4. Fie M_1, $M_2 \in \mathfrak{U}, (M_1, M_2) \in \varepsilon$ dacă și numai dacă există o bijecție $f : M_1 \to M_2$. Clasa de echivalență a mulțimii M o vom nota cu $|M|$ și o vom numi *cardinal al mulțimii M*.

Cititorul va verifica că relația ε este o veritabilă relație de echivalență.

Observația I.3.7. Astfel cardinalul mulțimii $M_n = \{m_1, ..., m_n\}$ constă din toate mulțimile cu n elemente. Din acest motiv vom nota $|M_n| = n$ și vom folosi uneori în locul termenului de „cardinal al mulțimii M" acela de „număr de elemente al mulțimii M".

§ I.4. NOȚIUNEA DE GRAF

Definiția I.4.1. Un *graf orientat* este o pereche $\mathfrak{G} = (V, \Gamma)$ unde V este o mulțime, iar $\Gamma : V \to \mathcal{P}(V)$ este o aplicație. Mulțimea V se numește *mulțimea vîrfurilor* grafului $\mathfrak{G}$, iar dacă $v_2 \in \Gamma(v_1)$ perechea ordonată (v_1, v_2) este un *arc* în graf.

Dacă $|V| < \infty$ graful $\mathfrak{G}$ este *finit*, în caz contrar $\mathfrak{G}$ este un *graf infinit*.

De obicei grafurile se reprezintă atașînd fiecărui vîrf un punct din plan și fiecărui arc (v_1, v_2) o săgeată care unește punctele v_1 și v_2, îndreptată de la v_1 la v_2.

Exemplul I.4.1. Fie $\mathfrak{G} = (\{v_1, v_2, v_3, v_4\}, \Gamma)$ unde aplicația Γ este dată de $\Gamma(v_1) = \{v_2, v_3, v_4\}$ $\Gamma(v_2) = \emptyset$, $\Gamma(v_3) = \{v_1, v_2\}$, $\Gamma(v_4) = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$.

Graful $\mathfrak{G}$ este reprezentat în figura I.4.1

Definiția I.4.2. *Mulțimea arcelor* grafului $\mathfrak{G} = (V, \Gamma)$ este mulțimea $U \subseteq V \times V$ dată de $U = \{(v_1, v_2) \mid v_2 \in \Gamma(v_1)\}$. În arcul (v_1, v_2), v_1 este *extremitatea inițială*, iar v_2 *extremitatea finală*.

Vom utiliza ulterior funcțiile a: $U \to V$, $z : U \to V$ date prin $a((v_1, v_2)) = v_1$, $z((v_1, v_2)) = v_2$.

Să observăm că definiția I.4.1 poate fi dată și sub forma echivalentă conținută în

Definiția I.4.3. Un *graf orientat* este un triplet $\mathfrak{G} = (V, U, h)$, în care V și U sînt respectiv mulțimile vîrfurilor și arcelor grafului, iar $h : U \to V \times V$ este o aplicație injectivă.

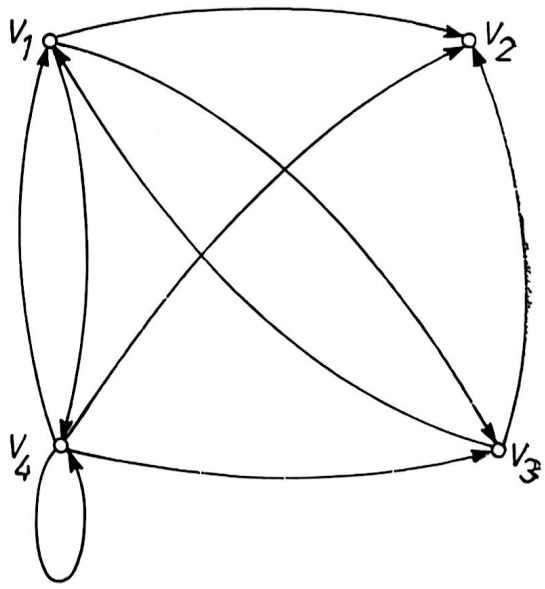


Fig. I.4.1

Echivalența dintre definițiile I.4.1 și I.4.3 se obține observînd că pentru un arc $u \in U$ avem $h(u) = (a(u), z(u))$.

Faptul că h este o aplicație injectivă revine la aceea că unei perechi de vîrfuri (v_1, v_2) îi corespunde cel mult un arc. Dacă se renunță la această proprietate (adică se admit mai multe arce îndreptate în același sens între două vîrfuri) obținem noțiunea de *multigraf orientat.*

Definiția I.4.4. Un *drum* în graful $\mathfrak{G}$ este o mulțime de arce $\{u_1, u_2, u_3, \ldots\}$ cu proprietatea $z(u_j) = a(u_{j+1})$. Un *circuit* este un drum finit $\{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ pentru care $z(u_n) = a(u_1)$.

Definiția I.4.5. Lungimea drumului $\{u_j \mid j \in J\}$ este $|J|$. Un drum de lungime 1 este un arc, iar un circuit de lungime 1 se numește *buclă.*

Observația I.4.1. Orice graf definește relația U pe V, iar orice relație $\alpha \subseteq V \times V$ definește graful (V, Γ), unde $\Gamma(v) = \{v' \mid (v, v') \in \alpha\}$.

Exemplul I.4.2. Fie α relația de divizibilitate pe mulțimea $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Graful acestei relații este reprezentat în figura I.4.2.

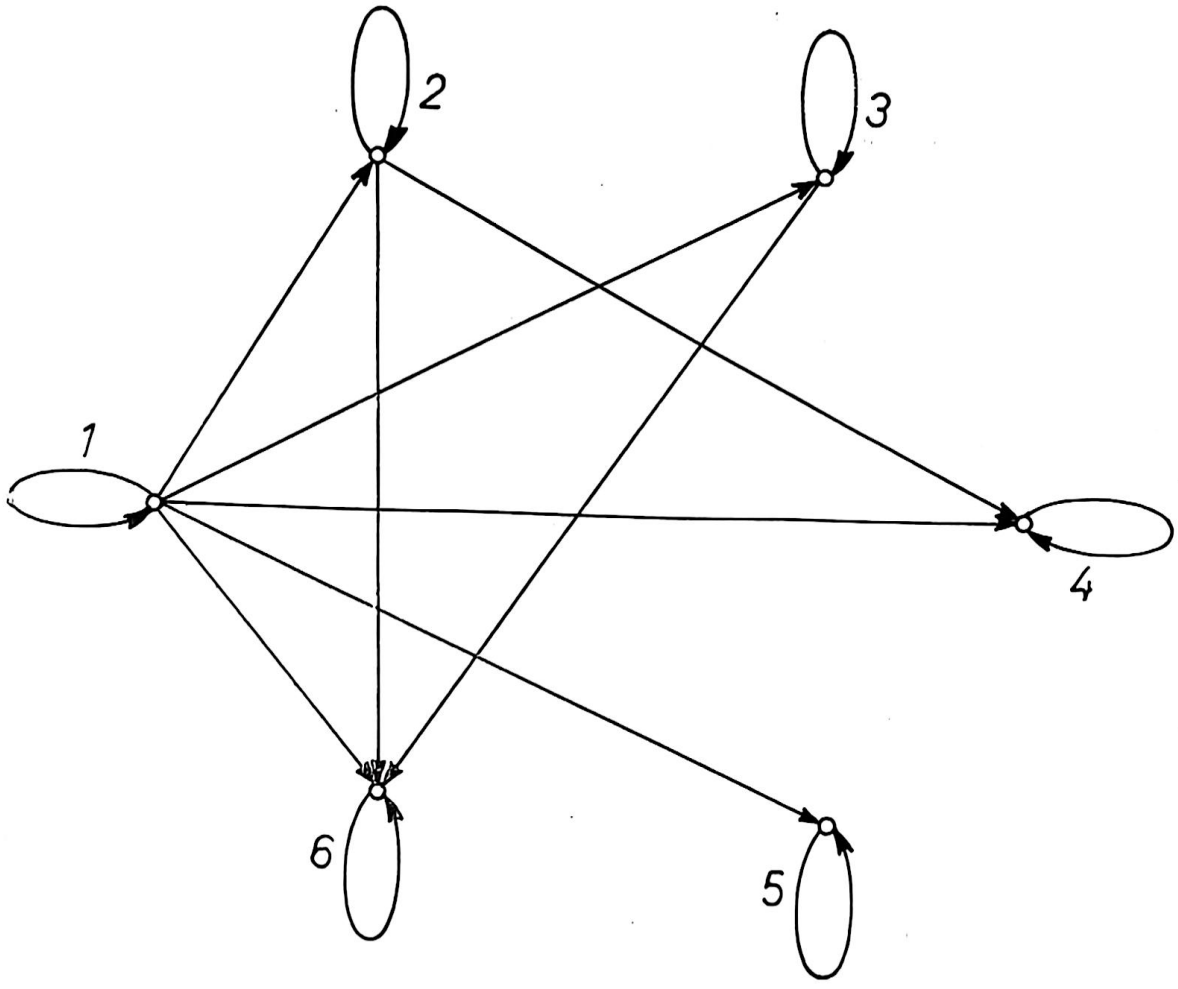


Fig. I. 4.2

Definiția I.4.6. *Un graf arborescent* este un graf fără circuite; *vîrfurile inițiale* ale unui graf arborescent sînt acelea pentru care $\Gamma^{-1}(v) = \emptyset$. Un *arbore* este un graf arborescent cu un singur vîrf inițial.

Definiția I.4.7. Un *graf conex* este un graf pentru care oricare ar fi vîrfurile $v', v'' \in V$, $v' \neq v''$ există un drum de la v' la v'' sau de la v'' la v'.

Definiția I.4.8. Un *graf tare conex* este un graf pentru care oricare ar fi vîrfurile $v', v'' \in V$ există un drum de la v' la v''.

Observația I. 4.2. Un graf tare conex este conex.

Definiția I.4.9. *Componenta conexă* a vîrfului v, C_v este mulțimea de vîrfuri $\{v\} \cup \{v' \mid \exists$ un drum de la v la v' sau de la v' la $v\}$.

Teorema I.4.1. *Componentele conexe* $\{C_v \mid v \in V\}$ *formează o partiție a lui* V.

Demonstrație. Se obține imediat din definiția I.4.9. ■

Observația I.4.3. Un graf este conex dacă și numai dacă are o singură componentă conexă.

Definiția I.4.10. Un *graf marcat* este un triplet $\mathfrak{G} = (V, \Gamma, \mu)$, unde (V, Γ) este un graf, iar $\mu : U \to M$ este *funcția de marcare*, unde U este mulțimea arcelor $\mathfrak{G}$, iar M este mulțimea *simbolilor de marcare*.

§ I. 5. SISTEME DE ÎNCHIDERE ȘI OPERATORI DE ÎNCHIDERE

Fie M o mulțime și $\mathcal{P}(M)$ mulțimea părților sale.

Definiția I.5.1. Un *sistem de închidere* este o parte $H \subseteq \mathcal{P}(M)$ cu proprietatea:

$$\{M_j \mid j \in J\} \subseteq H \text{ atunci } \bigcap_{j \in J} M_j \in H.$$

Observația I.5.1. Luînd $J = \emptyset$ obținem $M \in H$.

Exemplul I.5.1. Mulțimea relațiilor de echivalență pe mulțimea M formează un sistem de închidere. La fel, mulțimea relațiilor reflexive și tranzitive. Astfel, fie $\{\alpha_j \mid j \in J\}$ o familie de relații reflexive și tranzitive pe M și $\alpha = \bigcap_{j \in J} \alpha_j$. Deoarece $(m, m) \in \alpha_j$, $\forall m \in M$, $j \in J$ avem $(m, m) \in \alpha$ de unde α este o relație reflexivă. Dacă (m_1, m_2), $(m_2, m_3) \in \alpha$ urmează că (m_1, m_2), $(m_2, m_3) \in \alpha_j$, $\forall j \in J$. Cum α_j sînt relații tranzitive $(m_1, m_3) \in \alpha_j$, $\forall j \in J$, de unde $(m_1, m_3) \in \alpha$. Conchidem că α este o relație tranzitivă și reflexivă.

Definiția I.5.2. Un *operator de închidere* $\mathbf{C}$ pe mulțimea M este o aplicație $\mathbf{C}: \mathcal{P}(M) \to \mathcal{P}(M)$ cu proprietățile

a) dacă $M_1 \subseteq M_2$ atunci $\mathbf{C}(M_1) \subseteq \mathbf{C}(M_2)$,

b) $M_1 \subseteq \mathbf{C}(M_1)$,

c) $\mathbf{C}(\mathbf{C}(M_1)) = \mathbf{C}(M_1)$.

Teorema I.5.1. *Există o corespondență biunivocă între operatorii de închidere și sistemele de închidere definite pe mulțimea M. Anume operatorul de închidere $\mathbf{C}_H$ atașat sistemului de închidere H este dat de:*

$$\mathbf{C}_H(M_1) = \cap\{M' \mid M' \in H,\ M_1 \subseteq M'\},$$

iar sistemul de închidere atașat operatorului de închidere $\mathbf{C}$ este

$$H_{\mathbf{C}} = \{M' \mid M' \subseteq M,\ M' = \mathbf{C}(M')\}.$$

Demonstrație. Să arătăm că aplicația $\mathbf{C}_H : \mathcal{P}(M) \to \mathcal{P}(M)$ este un operator de închidere.

Dacă $M_1 \subseteq M_2$ atunci $\{M' \mid M' \in H,\ M_1 \subseteq M'\} \supseteq \{M' \mid M' \in H,\ M_2 \subseteq M'\}$, de unde $\cap\{M' \mid M' \in H, M_1 \subseteq M'\} \subseteq \cap\{M' \mid M' \in H, M_2 \subseteq M'\}$ adică $\mathbf{C}_H(M_1) \subseteq \mathbf{C}_H(M_2)$, deci are loc proprietatea a).

Proprietatea b) rezultă din definiția lui $\mathbf{C}_H$.

Fie $M_1 \in H$. Atunci $\mathbf{C}_H(M_1) = M_1$, iar dacă $\mathbf{C}_H(M_2) = M_2$ atunci $M_2 = \cap\{M' \mid M' \in H,\ M_2 \subseteq M'\} \in H$, deoarece H este un sistem de închidere.

Așadar $\mathbf{C}_H(M_1) = M_1$ dacă și numai dacă $M_1 \in H$.

Cum $\mathbf{C}_H(M_1) \in H$ avem $\mathbf{C}_H(\mathbf{C}_H(M_1)) = \mathbf{C}_H(M_1)$, deci are loc și proprietatea c).

Să arătăm acum că $H_{\mathbf{C}}$ este un sistem de închidere.

Fie $\{M_j \mid j \in J\}$ o familie de mulțimi din $H_{\mathbf{C}}$ și $M' = \cap\{M_j \mid j \in J\}$. Deoarece $M' \subseteq M_j$, $\forall j \in J$ avem $\mathbf{C}(M') \subseteq \mathbf{C}(M_j) = M_j$, deci

$$\mathbf{C}(M') \subseteq \cap\{M_j \mid j \in J\} = M'.$$

Conform proprietății b) $\mathbf{C}(M') \supseteq M'$ și deci $\mathbf{C}(M') = M'$, adică $M' \in H_{\mathbf{C}}$.

Să arătăm că $H_{\mathbf{C}_H} = H$.

Fie $M' \in H$, atunci avem $\mathbf{C}_H(M') = M'$, de unde $M' \in H_{\mathbf{C}_H}$, adică $H \subseteq H_{\mathbf{C}_H}$. Incluziunea contrară se obține similar.

Propunem cititorului să verifice egalitatea

$$\mathbf{C}_{H_{\mathbf{C}}} = \mathbf{C}. \quad \blacksquare$$

Am constatat că mulțimea relați lor reflexive și tranzitive pe mulțimea M formează un sistem de închidere pe mulțimea $M \times M$ (vezi exemplul I.5.1)

Teorema I.5.2. *Fie* $\alpha \subseteq M \times M$ *o relație și* $\mathbf{C}$ *operatorul de închidere corespunzător sistemului de închidere al relațiilor reflexive și tranzitive. Închiderea reflexivă și tranzitivă a relației* α *este relația* $\hat{\alpha}$ *dată de:*

$$\hat{\alpha} = \mathbf{C}(\alpha) = \iota_M \cup \bigcup_{k=1}^{\infty} \alpha^k.$$

Demonstrație. Relația $\iota_M \cup \bigcup_{k=1}^{\infty} \alpha^k$ este reflexivă și tranzitivă, deoarece $\hat{\alpha} \geqslant \iota_M$ și $\hat{\alpha}\hat{\alpha} = \left(\iota_M \cup \bigcup_{k=1}^{\infty} \alpha^k\right)\left(\iota_M \cup \bigcup_{k=1}^{\infty} \alpha^k\right) = \iota_M \cup \bigcup_{k=1}^{\infty} \alpha^k = \hat{\alpha}$. Fie $\beta \geqslant \alpha$ o relație reflexivă și tranzitivă. Avem $\beta \geqslant \iota_M$, $\beta \geqslant \beta^2 \geqslant \alpha^2$, deci $\beta \geqslant \alpha^2$. Apoi, presupunînd că $\beta \geqslant \alpha^n$, avem $\beta \geqslant \beta^2 \geqslant \beta\alpha \geqslant \alpha^{n+1}$ adică $\beta \geqslant \iota_M \cup \bigcup_{k=1}^{\infty} \alpha^k = \hat{\alpha}$. ■

§ I. 6. NOȚIUNI DE TEORIA LATICILOR

Fie (M, α) o mulțime parțial ordonată.

Definiția I.6.1. O *latice* este o mulțime parțial ordonată $L = (M, \alpha)$ pentru care, $\forall\, m_1, m_2 \in M$ există sup $\{m_1, m_2\}$, inf $\{m_1, m_2\} \in M$. Vom nota:

$$\sup \{m_1, m_2\} = m_1 \vee m_2,$$

$$\inf \{m_1, m_2\} = m_1 \wedge m_2.$$

Operațiile binare „$\vee$" și „$\wedge$" se numesc reuniune, respectiv intersecție.

Teorema I.6.1. *Operațiile* „$\vee$" *și* „$\wedge$" *din laticea* L *se bucură de următoarele proprietăți:*

a) $(m_1 \vee m_2) \vee m_3 = m_1 \vee (m_2 \vee m_3)$; $(m_1 \wedge m_2) \wedge m_3 = m_1 \wedge (m_2 \wedge m_3)$, *(asociativitate)*,

b) $m_1 \vee m_2 = m_2 \vee m_1$; $m_1 \wedge m_2 = m_2 \wedge m_1$, *(comutativitate)*,

c) $m_1 \vee (m_1 \wedge m_2) = m_1$; $m_1 \wedge (m_1 \vee m_2) = m_1$, *(absorbție)*,

d) $m_1 \vee m_1 = m_1$; $m_1 \wedge m_1 = m_1$, *(idempotență)*.

Demonstrație. a) Fie $m' = (m_1 \vee m_2) \vee m_3$, $m'' = m_1 \vee (m_2 \vee m_3)$. Avem $m' \geqslant m_1 \vee m_2$, $m' \geqslant m_3$, adică $m' \geqslant m_j$, $j = \overline{1, 3}$. De aici $m' \geqslant \sup\{m_2, m_3\}$ și deci $m' \geqslant \sup\{m_1, \sup\{m_2, m_3\}\} = m''$. Similar se arată că $m'' \geqslant m'$ de unde $m' = m''$.

Dacă avem $m' = (m_1 \wedge m_2) \wedge m_3$ și $m'' = m_1 \wedge (m_2 \wedge m_3)$ atunci $m' \leqslant m_1 \wedge m_2$, $m' \leqslant m_3$, adică $m' \leqslant m_j$, $j = \overline{1, 3}$. Ca atare $m' \leqslant \inf\{m_2, m_3\}$ și deci $m' \leqslant \inf\{m_1, \inf\{m_2, m_3\}\} = m''$. Inegalitatea $m'' \leqslant m'$ se arată la fel.

b) rezultă imediat din proprietățile infimumului și supremului.

c) fie $m' = m_1 \vee (m_1 \wedge m_2)$. Evident $m' \geqslant m_1$. Pe de altă parte $m_1 \geqslant m_1$ și $m_1 \geqslant m_1 \wedge m_2$, de unde $m_1 \geqslant \sup\{m_1 \vee (m_1 \wedge m_2)\} = m'$, de unde $m' = m_1$. Analog se procedează pentru cealaltă egalitate.

d) aplicînd proprietatea c) de două ori avem $m_1 \vee m_2 = m_1 \vee (m_1 \wedge (m_1 \vee m_2)) = m_1$. La fel $m_1 \wedge m_1 = m_1$. ■

Consecința I.6.1. Simetria proprietăților a) — d) din teorema precedentă ne permite să obținem dintr-o propoziție adevărată pentru o latice L o nouă propoziție adevărată schimbînd peste tot operațiile „$\vee$" și „$\wedge$" între ele. Această proprietate a laticilor poartă numele de *principiul dualității pentru latice.*

Observația I.6.1. Operațiile de reuniune și intersecție se extind imediat la orice număr finit de termeni utilizînd proprietatea de asociativitate. Anume:

$$\bigvee_{j=1}^{n} m_j = m_1 \vee m_2 \vee \ldots \vee m_n; \qquad \bigwedge_{j=1}^{n} m_j = m_1 \wedge m_2 \wedge \ldots \wedge m_n.$$

Observația I.6.2. Fie M o mulțime dotată cu două operații „$\vee$" și „$\wedge$" care se bucură de proprietățile a) — c) din teorema I.6.1. Considerăm mulțimea parțial ordonată (M, α) unde $(m_1, m_2) \in \alpha$, dacă și numai dacă $m_1 \vee m_2 = m_2$ sau, ceea ce revine la același lucru (exercițiu!) $m_1 \wedge m_2 = m_1$.

Într-adevăr, din proprietatea d) (care rezultă din proprietatea c)) avem $(m_1, m_1) \in \alpha$, $\forall m_1 \in M$. Apoi, dacă $(m_1, m_2) \in \alpha$ și $(m_2, m_1) \in \alpha$ atunci $m_1 \vee m_2 = m_2 = m_1$, iar dacă $(m_1, m_2) \in \alpha$, $(m_2, m_3) \in \alpha$ atunci $m_1 \vee m_2 = m_2$, $m_2 \vee m_3 = m_3$. Deci $m_1 \vee m_3 = m_1 \vee (m_2 \vee m_3) = (m_1 \vee m_2) \vee m_3$, $m_2 \vee m_3 = m_3$, adică $(m_1, m_3) \in \alpha$.

Mulțimea parțial ordonată (M, α) formează o latice, luînd

$$\sup\{m_1, m_2\} = m_1 \vee m_2,$$

$$\inf\{m_1, m_2\} = m_1 \wedge m_2.$$

în cazul în care sup și inf există pentru orice pereche $\{m_1, m_2\}$.

Astfel $(m_1, m_1 \vee m_2) \in \alpha$, $(m_2, m_1 \vee m_2) \in \alpha$, iar dacă $(m_1, m) \in \alpha$ $(m_2, m) \in \alpha$, atunci $m_1 \vee m = m_2 \vee m = m$, de unde $(m_1 \vee m) \vee (m_2 \vee m) = m \vee m = m$, iar pe de altă parte $(m_1 \vee m) \vee (m_2 \vee m) = m_1 \vee m_2 \vee m \vee m = m_1 \vee m_2 \vee m$, adică $(m_1 \vee m_2, m) \in \alpha$.

La fel se arată că $m_1 \wedge m_2$ este inf $\{m_1, m_2\}$. Vom nota această latice cu $(M, \vee, \wedge)$ și relația de ordine parțială α, cu semnul „$\leqslant$".

Definiția I.6.2. *O sublatice* a laticii $(M, \vee, \wedge)$ este tripletul $(M_1, \vee, \wedge)$ unde $M_1 \subseteq M$ și

$$\forall m', m'' \in M_1 \text{ avem } m' \vee m'' \in M_1, \quad m' \wedge m'' \in M_1,$$

adică o submulțime M_1 a lui M care formează la însăși latice față de operațiile din laticea $(M, \vee, \wedge)$.

Definiția I.6.3. *O semilatice* este o pereche $(M, *)$ unde M este o mulțime, iar „$*$" este o operație care se bucură de următoarele proprietăți:

a) $(m_1 * m_2) * m_3 = m_1 * (m_2 * m_3)$,

b) $m_1 * m_2 = m_2 * m_1$,

c) $m_1 * m_1 = m_1$.

Observația I.6.3. Unei latice $(M, \vee, \wedge)$ i se pot atașa *semilaticea disjunctivă* $(M, \vee)$ și *semilaticea conjunctivă* $(M, \wedge)$.

Exemplul I.6.1. Fie M o mulțime arbitrară. Tripletul $(\mathcal{P}(M), \cup, \cap)$ este o latice în baza proprietăților operațiilor de reuniune și intersecție de mulțimi (vezi definiția I.1.3).

Dacă $M_1 \subset M$ atunci $(\mathcal{P}(M_1), \cup, \cap)$ este o sublatice a laticii $(\mathcal{P}(M), \cup, \cap)$.

Exemplul I.6.2. Fie $\mathrm{Eq}(M)$ mulțimea echivalențelor pe mulțimea M. Pe $\mathrm{Eq}(M)$ putem introduce o relație de ordine parțială „$\leqslant$" punînd $\alpha \leqslant \beta$ dacă și numai dacă din $(m_1, m_2) \in \alpha$ rezultă $(m_1, m_2) \in \beta$ oricare ar fi $m_1, m_2 \in M$.

Relația $\gamma = \alpha_1 \wedge \alpha_2$ va fi dată de

$$\gamma = \{(m', m'') \mid (m', m'') \in \alpha_1 \text{ și } (m', m'') \in \alpha_2\}$$

iar $\delta = \alpha_1 \vee \alpha_2$ se obține ca

$$\delta = \{(m', m'') \mid \exists\, m_1, \ldots, m_k \text{ și } (m', m_1) \in \alpha_{j_1}, (m_1, m_2) \in \alpha_{j_2}, \ldots, (m_k, m'') \in \alpha_{j_{k+1}}$$

$$j_1, \ldots, j_{k+1} \in \{1, 2\}\}$$

Vom arăta că, într-adevăr $\delta = \sup\{\alpha_1, \alpha_2\}$. Este clar că dacă $(m', m'') \in \alpha_1$ avem $(m', m'') \in \delta$ luînd $m_1 = m''$ și $j_1 = 1$. Analog se arată că $\alpha_2 \leqslant \delta$.

Dacă $\varepsilon \geqslant \alpha_1, \alpha_2$ și $(m', m'') \in \delta$ atunci există $m_1, \ldots, m_k$ astfel ca $(m', m_1) \in \alpha_{j_1}, \ldots, (m_k, m'') \in \alpha_{j_{k+1}}$, $j_1, \ldots, j_{k+1} \in \{1, 2\}$, de unde $(m', m_1) \in \varepsilon, \ldots, (m_k, m'') \in \varepsilon$ și ținînd seama de tranzitivitatea relației de echivalență ε, avem $(m', m'') \in \varepsilon$, adică $\varepsilon \geqslant \delta$.

Prin urmare mulțimea echivalențelor pe o mulțime M formează o latice.

Exemplul I.6.3. Mulțimea parțial ordonată $(N^*, /)$, unde „$/$" este relația de divizibilitate (vezi exemplul I.1.4) formează o latice unde

$$n_1 \wedge n_2 = (n_1, n_2)^*,$$

$$n_1 \vee n_2 = [n_1, n_2]^*.$$

Definiția 1.6.4. *Diagrama mulțimii parțial ordonată* $(M, \leqslant)$ este graful orientat (M, Γ) unde $m' \in \Gamma(m)$ dacă și numai dacă $m \leqslant m'$ și oricare ar fi m_1 cu proprietatea $m \leqslant m_1 \leqslant m'$ avem sau $m = m_1$ sau $m_1 = m'$.

Considerarea diagramei pentru mulțimea parțial ordonată (M, α) este în special utilă cînd $|M| < \infty$.

Cum o latice este o mulțime parțial ordonată putem vorbi de diagrama unei latice.

Exemplul I.6.4. Fie laticile $L' = (M, \vee', \wedge')$, $L'' = (M, \vee'', \wedge'')$ unde $M = \{m_1, m_2, m_3, m_4, m_5\}$ iar operațiile sînt date în tablourile

$\vee'$	m_1	m_2	m_3	m_4	m_5
m_1	m_1	m_2	m_3	m_4	m_5
m_2	m_2	m_2	m_3	m_5	m_5
m_3	m_3	m_3	m_3	m_5	m_5
m_4	m_4	m_5	m_5	m_4	m_5
m_5	m_5	m_5	m_5	m_5	m_5

$\wedge'$	m_1	m_2	m_3	m_4	m_5
m_1	m_2	m_1	m_1	m_1	m_1	m_1
m_2	m_2	m_1	m_2	m_2	m_1	m_2
m_3	m_3	m_1	m_2	m_3	m_4	m_3
m_4	m_4	m_1	m_1	m_1	m_4	m_4
m_5	m_5	m_1	m_2	m_3	m_4	m_5

$\vee''$	m_1	m_2	m_3	m_4	m_5
m_1	m_1	m_2	m_3	m_4	m_5
m_2	m_2	m_2	m_5	m_5	m_5
m_3	m_3	m_5	m_3	m_5	m_5
m_4	m_4	m_5	m_5	m_4	m_5
m_5	m_5	m_5	m_5	m_5	m_5

$\wedge''$	m_1	m_2	m_3	m_4	m_5
m_1	m_1	m_1	m_2	m_2	m_1	m_1
m_2	m_2	m_1	m_2	m_1	m_1	m_2
m_3	m_3	m_1	m_1	m_3	m_1	m_3
m_4	m_4	m_1	m_1	m_4	m_4	m_4
m_5	m_5	m_1	m_2	m_3	m_4	m_5

* (a, b) este cel mai mare divizor comun, iar [a, b] este cel mai mic multiplu comun al numerelor a și b.

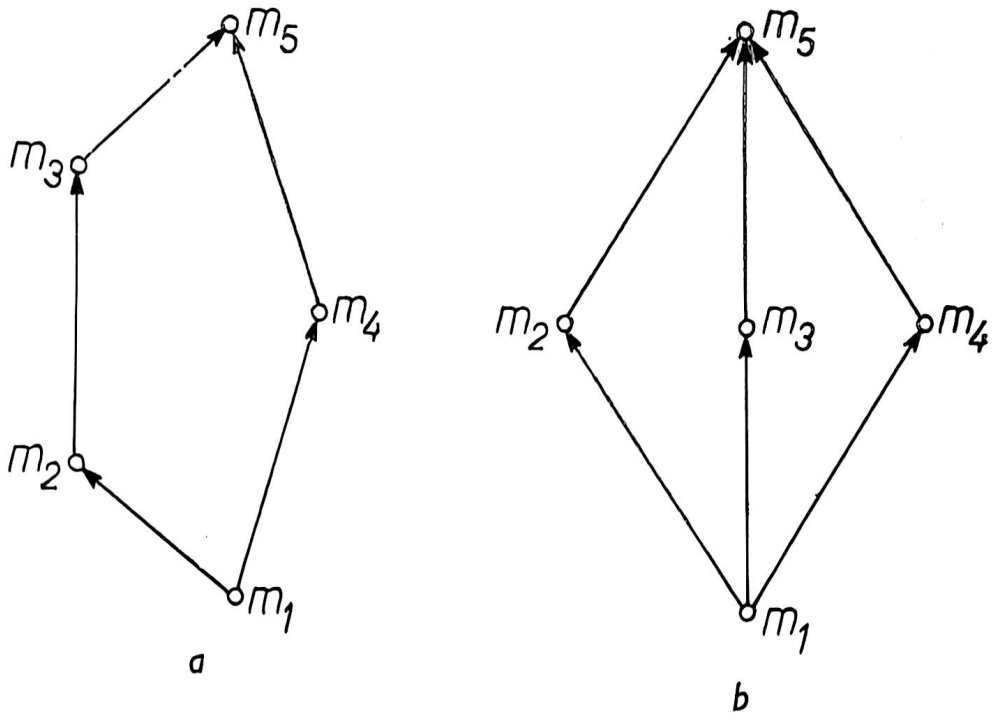


Fig. I. 6.1

Diagramele laticilor L' şi L'' sînt reprezentate respectiv în fig. I.6.1 a) şi b).

Definiţia I.6.5. O *latice mărginită* este un 5-uplu $L = (M, \vee, \wedge, 0,1)$ unde $(M, \vee, \wedge)$ este o latice, iar $0, 1 \in M$ sînt respectiv *cel mai mic* şi *cel mai mare* element al laticei L, care se bucură de proprietatea

$$\forall m \in M,\ 0 \vee m = m,\ m \wedge 1 = m. \tag{I.6.1}$$

Observaţia I.6.4. Cel mai mare şi cel mai mic element al laticei L sînt în fond cel mai mare şi cel mai mic element al mulţimii parţial ordonate ataşate acestei latici.

Cititorul va verifica că orice latice $(M, \vee, \wedge)$ finită (cu $|M| < \infty$) este mărginită.

Observaţia I.6.5. Formula (I.6.1) este echivalentă cu

$$\forall m \in M,\ 0 \wedge m = 0,\ m \vee 1 = 1,$$

şi principiul dualităţii formulat în consecinţa I.6.1 se completează pentru laticile mărginite cu cerinţa de a schimba între ele şi elementele 0 şi 1.

Definiţia I.6.6. Fie $L = (M, \vee, \wedge, 0,1)$ o latice mărginită şi $m \in M$. Un *element complementar* (sau pe scurt un *complement*) al elementului m este elementul m' cu

$$m \vee m' = 1,$$
$$m \wedge m' = 0.$$

Observaţia I.6.6. Nu orice element dintr-o latice mărginită are un complementar. Astfel în laticea mărginită $(\{0, m, 1\}, \vee, \wedge, 0,1)$ elementul m nu are complement.

Complementul unui element, dacă există nu este în mod necesar unic. Astfel, în laticea L' reprezentată în fig. I.6.1 a) elementul m_4 are două complemente, anume m_2 şi m_1.

Să observăm că elementele 0 şi 1 au fiecare complement unic respectiv pe 1 şi 0.

Definiţia I.6.7. O *latice complementată* este o latice mărginită în care orice element are un complement unic.

Vom nota cu m^c complementul elementului m dintr-o latice complementată.

Definiţia I.6.8. O *latice modulară* este o latice $(M, \vee, \wedge)$ în care $\forall m_1, m_2, m \in M$ cu $m_1 \leqslant m_2$ avem

$$(m_1 \vee m) \wedge m_2 = m_1 \vee (m \wedge m_2). \tag{I.6.2}$$

Observaţia I.6.7. Deoarece în orice latice avem $m_1 \vee (m \wedge m_2) \leqslant (m_1 \vee m) \wedge m_2$, dacă $m_1 \leqslant m_2$ condiţia de modularitate revine la

$$m_1 \vee (m \wedge m_2) \geqslant (m_1 \vee m) \wedge m_2.$$

Definiţia I.6.9. O *latice distributivă* este o latice $(M, \vee, \wedge)$ în care $\forall m_1, m_2, m_3 \in M$ avem

$$(m_1 \vee m_2) \wedge m_3 = (m_1 \wedge m_3) \vee (m_2 \wedge m_3). \tag{I.6.3}$$

Definiţia I.6.10. O *algebră Boole* este o latice distributivă şi complementată.

Exemplul I.6.5. Laticea L' din exemplul I.6.4 este modulară, iar laticea $(\{m_1, m_2, 0, 1\}, \vee, \wedge, 0,1)$ unde $m_1 \vee m_2 = 1, m_1 \wedge m_2 = 0$ este o latice complementată şi distributivă, deci o algebră Boole. Orice mulţime total ordonată cu cel puţin trei elemente este o latice distributivă, dar necomplementată.

Laticea $L = (\{0,1\}, \vee, \wedge, 0,1)$ este o algebră Boole şi ea se notează de obicei cu $B_2 = (0,1, \vee, \wedge, ^c)$, fiind mult utilizată în aplicaţii.

Laticea din exemplul I.6.3 este distributivă.

Laticea mărginită $(\mathcal{P}(M), \cup, \cap, \complement, M)$ formează o algebră Boole în care $M_1^c = M \setminus M_1$.

Observaţia I.6.8. Pentru o latice distributivă $(M, \vee, \wedge)$ din formula (I.6.8) prin dualitate, se obţine:

$$(m_1 \wedge m_2) \vee m_3 = (m_1 \vee m_3) \wedge (m_2 \vee m_3).$$

Propunem cititorului să arate că o latice este distributivă dacă şi numai dacă are loc egalitatea:

$$(m_1 \wedge m_2) \vee (m_2 \wedge m_3) \vee (m_3 \wedge m_1) = (m_1 \vee m_2) \wedge (m_2 \vee m_1) \wedge (m_3 > \vee m_1).$$

Observația I.6.9. Orice latice distributivă este o latice modulară. Într-adevăr, luînd $m_1 \leqslant m_3$, în formula (I.6.3), obținem formula (I.6.2).

Deoarece laticea L din exemplul I.6.4 este modulară, dar nu distributivă, reciproca afirmației de mai sus nu este adevărată. Laticea L' din același exemplu asigură că există latici nemodulare.

Teorema I.6.2. *Într-o latice distributivă mărginită, complementul unui element, dacă există este unic.*

Demonstrație. Să presupunem că:

$$m \wedge m' = m \wedge m'' = 0,$$

$$m \vee m' = m \vee m'' = 1.$$

Atunci $m' = m' \wedge 1 = m' \wedge (m \vee m'') = (m' \wedge m) \vee (m' \wedge m'') = m' \vee m''$, adică $m' \geqslant m''$. La fel se arată că $m'' \geqslant m'$, deci $m' = m''$. ■

Teorema I.6.3. *Într-o algebră Boole au loc relațiile lui De Morgan:*

(I.6.4) $$(m_1 \vee m_2)^c = m_1^c \wedge m_2^c$$

(I.6.5) $$(m_1 \wedge m_2)^c = m_1^c \vee m_2^c.$$

Demonstrație. Vom dovedi că

$$(m_1 \vee m_2) \vee (m_1^c \wedge m_2^c) = 1$$

$$(m_1 \vee m_2) \wedge (m_1^c \wedge m_2^c) = 0$$

de unde, ținînd seama de unicitatea complementului într-o latice distributivă vom obține formula (I.6.4.).

Avem $(m_1 \vee m_2) \vee (m_1^c \wedge m_2^c) = ((m_1 \vee m_2) \vee m_1^c) \wedge ((m_1 \vee m_2) \vee m_2^c) = 1 \wedge 1 = 1$, iar $(m_1 \vee m_2) \wedge (m_1^c \wedge m_2^c) = (m_1 \wedge (m_1^c \wedge m_2^c)) \vee (m_2 \wedge (m_1^c \wedge m_2^c)) = 0 \vee 0 = 0$.

Similar se procedează pentru formula (I.6.5) ■

Fie $(M, \vee, \wedge)$ o latice și $\alpha \subseteq M \times M$ o echivalență pe mulțimea M.

Definiția I.6.11. O *congruență pe o latice* $L = (M, \vee, \wedge)$ este o echivalență α pentru care $\forall m \in M$ avem

$$\forall m_1, m_2 \in M,\ (m_1, m_2) \in \alpha \rightarrow \begin{cases} (m_1 \vee m,\ m_2 \vee m) \in \alpha \\ (m_1 \wedge m,\ m_2 \wedge m) \in \alpha. \end{cases}$$

Observația I.6.10. Mulțimea congruențelor pe o latice $L = (M, \vee, \wedge)$ formează o sublatice a laticii $\mathrm{Eq}(M)$.

Definiția I.6.12. Un *homomorfism* de la laticea $L_1 = (M_1, \vee, \wedge)$ la laticea $L_2 = (M_2, \vee, \wedge)$ este o aplicație $h : M_1 \to M_2$ cu proprietățile

$$h(m_1 \vee m_2) = h(m_1) \vee h(m_2),$$

$$h(m_1 \wedge m_2) = h(m_1) \wedge h(m_2).$$

Dacă aplicația h este bijectivă atunci h se numește *izomorfism*.

Observația I.6.11. Orice homomorfism între laticile $L_1 = (M_1, \vee, \wedge)$ și $L_2 = (M_2, \vee, \wedge)$ este o aplicație izotonă între mulțimile parțial ordonate $(M_1, \leqslant)$ și $(M_2, \leqslant)$.

Reciproca nu este în general adevărată, cum rezultă din:

Exemplul I.6.6. Fie $h : L' \to L'$ unde L' este laticea din exemplul I.6.4 reprezentată în figura I.6.1 a) și $h(m_1) = m_1$, $h(m_2) = h(m_3) = h(m_4) = m_4$, $h(m_5) = m_5$. Aplicația h este evident izotonă, dar nu este un homomorfism deoarece $h(m_3 \vee m_4) = h(m_5) = m_5$, iar $h(m_3) \vee h(m_4) = m_4 \neq m_5$.

§ I.7. NOȚIUNEA DE CATEGORIE

Fie $\mathfrak{U}$ un univers.

Definiția I.7.1. O $\mathfrak{U}$-*categorie* $\mathcal{C}$ constă din:

a) O $\mathfrak{U}$-clasă numită *clasa obiectelor* categoriei C notată cu Ob C;

b) O $\mathfrak{U}$-clasă numită *clasa morfismelor* categoriei $\mathcal{C}$ notată cu Morf $\mathcal{C}$ astfel încît oricărei perechi de obiecte A, B îi corespunde o mulțime de morfisme $[A, B]_{\mathcal{C}}$ din această clasă și la două perechi distincte de obiecte corespund două mulțimi disjuncte de morfisme*.

Dacă $f \in [A, B]_{\mathcal{C}}$ vom nota acest lucru și prin $A \xrightarrow{f} B$ sau $f : A \to B$ și vom spune că f este un morfism de la A la B.

c) O *lege de compunere* a morfismelor care este o aplicație de la $[B, C]_{\mathcal{C}} \times [A, B]_{\mathcal{C}} \to [A, C]_{\mathcal{C}}$, pentru orice triplet ordonat de obiecte (A, B, C), în așa fel încît morfismelor $A \xrightarrow{f_1} B$, $B \xrightarrow{f_2} C$ li se asociază morfismul $A \xrightarrow{f_2 f_1} C$.

Compunerea morfismelor satisface proprietatea de *asociativitate*, adică, oricare ar fi morfismele $A \xrightarrow{f_1} B$, $B \xrightarrow{f_2} C$, $C \xrightarrow{f_3} D$ avem:

$$f_3(f_2 f_1) = (f_3 f_2) f_1.$$

* Mulțimea morfismelor $[A, B]_{\mathcal{C}}$ se mai notează cu Hom (A, B).

Pentru fiecare obiect A al categoriei există un morfism $A \xrightarrow{1_A} A$ **numit** *morfism identic* încît oricare ar fi $A \xrightarrow{f} B, C \xrightarrow{g} A$ avem:

$$f 1_A = f,\ 1_A g = g.$$

Observația I.7.1. Mulțimea de morfisme $[A, B]_{\mathcal{C}}$ poate fi și vidă dar $[A, A]_{\mathcal{C}} \neq \emptyset$, $\forall A \in \mathrm{Ob}\ \mathcal{C}$, deoarece $1_A \in [A, A]_{\mathcal{C}}$. Morfismul identic este **unic** determinat de A întrucît dacă ar mai exista încă un morfism **identic** $1'_A \in [A, A]_{\mathcal{C}}$ am avea $1_A \cdot 1'_A = 1_A = 1'_A$.

Reciproc, morfismul 1_A determină obiectul A.

Dacă renunțăm la cerința ca $[A, B]_{\mathcal{C}}$ să fie o mulțime (adică $[A, B]_{\mathcal{C}}$ poate fi o clasă) obținem noțiunea de *supercategorie.*

O $\mathfrak{U}$-categorie, unde $\mathfrak{U}$ este universul mulțimilor finite o vom numi pe scurt *categorie.*

Definiția I.7.2. O *categorie mică* este o categorie $\mathcal{C}$ pentru care clasa $\mathrm{Ob}\ \mathcal{C}$ este o mulțime.

Definiția I.7.3. *Categoria duală* categoriei $\mathcal{C}$ este categoria $\mathcal{C}^0$ pentru care $\mathrm{Ob}\ (\mathcal{C}^0) = \mathrm{Ob}\ \mathcal{C}$ și $[A, B]_{\mathcal{C}^0} = [B, A]_{\mathcal{C}}$.

Este clar că $(\mathcal{C}^0)^0 = \mathcal{C}$.

Definiția I.7.4. O *subcategorie* $\mathcal{D}$ a categoriei $\mathcal{C}$ este o categorie cu proprietățile:

a) $\mathrm{Ob}\ \mathcal{D} \subseteq \mathrm{Ob}\ \mathcal{C}$,

b) $\forall\ A, B \in \mathrm{Ob}\ \mathcal{D}$, $[A, B]_{\mathcal{D}} \subseteq [A, B]_{\mathcal{C}}$,

c) $\forall\ A \in \mathrm{Ob}\ \mathcal{D}$, $1_A \in [A, A]_{\mathcal{D}}$,

d) $\forall\ f \in [A, B]_{\mathcal{D}}$, $g \in [B, C]_{\mathcal{D}}$ avem $gf \in [A, C]_{\mathcal{D}}$.

Dacă $\forall\ A, B \in \mathrm{Ob}\ \mathcal{D}$, avem $[A, B]_{\mathcal{D}} = [A, B]_{\mathcal{C}}$ atunci $\mathcal{D}$ se numește o *subcategorie plină.*

Definiția I.7.5. Un morfism $A \xrightarrow{f} B$ este:

a) un *monomorfism,* dacă din $fg = fh$ rezultă $g = h$,

b) un *epimorfism,* dacă din $gf = hf$ rezultă $g = h$,

c) un *bimorfism,* dacă este monomorfism și epimorfism,

d) o *retractă,* dacă există $B \xrightarrow{g} A$ cu $fg = 1_B$,

e) o *secțiune,* dacă există $B \xrightarrow{g} A$ cu $gf = 1_A$.

f) un *izomorfism,* dacă este simultan secțiune și retractă.

Legătura dintre noțiunile introduse este dată în:

Teorema I.7.1. *Orice secțiune este monomorfism și orice retractă este epimorfism. Orice retractă monomorfă și orice secțiune epimorfă sînt izomorfisme și orice izomorfism este bimorfism.*

Demonstrație. Fie f o secțiune și să presupunem că $fh_1 = fh_2$. Există g astfel ca $gf = 1_A$, de unde $(gf)\ h_1 = (gf)\ h_2$, adică $h_1 = h_2$, deci f este monomorfism. La fel se arată că orice retractă este epimorfism.

Apoi, dacă f este o retractă monomorfă, pentru a arăta că f este izomorfism rămîne să dovedim că f este o secţiune. Fie $g : B \to A$ astfel ca $fg = 1_B$. Avem $fgf = 1_B \cdot f = f = f \cdot 1_A$ şi, cum f este monomorfism, rezultă $gf = 1_A$ adică f este o secţiune.

Fie acum f o secţiune epimorfă. Avem $gf = 1_A$ şi $fgf = f \cdot 1_A = f = 1_B \cdot f$ şi deoarece f este un epimorfism urmează $fg = 1_B$, adică f este şi o retractă. ■

Definiţia I.7.6. Un obiect $A \in \mathrm{Ob}\ \mathcal{C}$ este:

a) *obiect iniţial*, dacă $\forall B \in \mathrm{Ob}\ \mathcal{C}$, $|[A, B]_{\mathcal{C}}| = 1$, adică există un singur morfism de la A la B.

b) *obiect final*, dacă $\forall B \in \mathrm{Ob}\ \mathcal{C}$, $|[B, A]_{\mathcal{C}}| = 1$, adică există un singur morfism de la B la A;

c) *obiect nul*, dacă este simultan iniţial şi final.

Observaţia I.7.2. Din orice propoziţie adevărată în categoria $\mathcal{C}$ se obţine o propoziţie adevărată în categoria duală $\mathcal{C}^0$ prin „inversarea" morfismelor, afirmaţie numită *principiul dualităţii în teoria categoriilor*. Iată cîteva noţiuni care se corespund prin dualitate, din cele considerate pînă acum:

monomorfism — *epimorfism*,

secţiune — *retractă*,

obiect iniţial — *obiect final*.

Noţiunile de bimorfism, izomorfism şi obiect nul sînt *autoduale*. Astfel, faptul că orice secţiune epimorfă este un izomorfism rezultă prin dualizare din afirmaţia că orice retractă monomorfă este un izomorfism.

Definiţia I.7.7. *Multigraful ataşat categoriei mici* $\mathcal{C}$ este multigraful $\mathfrak{G} = (\mathrm{Ob}\ \mathcal{C}, \mathrm{Morf}\ \mathcal{C}, h)$ unde pentru morfismul $u \in [A, B]_{\mathcal{C}}$ avem $h(u) = (A, B)$.

Teorema I.7.2. *Dacă f şi g sînt monomorfisme (epimorfisme, bimorfisme) atunci şi fg este monomorfism (epimorfism, bimorfism).*

Demonstraţia este imediată. ■

Teorema I.7.3. *Dacă fg este monomorfism (epimorfism) atunci g (respectiv f) este monomorfism (epimorfism).*

Demonstraţie. Să presupunem că $gh_1 = gh_2$. De aici $f(gh_1) = f(gh_2)$ sau $(fg)h_1 = (fg)h_2$, de unde $h_1 = h_2$. Apoi, dacă $h_1 f = h_2 f$, cum $(h_1 f)g = (h_2 f)g$ urmează $h_1(fg) = h_2(fg)$ deci $h_1 = h_2$. ■

O generalizare a noţiunii de monomorfism este dată de:

Definiţia I.7.8. *Familia* de morfisme $\{A \xrightarrow{f_j} A_j \mid j \in J\}$ se numeşte *monomorfică* dacă din $f_j h' = f_j h''$, $\forall j \in J$ avem $h' = h''$.

Similar, se generalizează noţiunea de epimorfism.

Definiția I.7.9. O *familie epimorfică* este o familie de morfisme $\{A_j \xrightarrow{f_j} A \mid j \in J\}$ pentru care din $h'f_j = h''f_j$, $\forall\, j \in J$ avem $h' = h''$.

Observația I.7.3. Pentru $|J| = 1$ o familie monomorfică (epimorfică) se reduce la un monomorfism (epimorfism).

Exemplul I.7.1. Unei mulțimi parțial ordonate $(M, \leqslant)$ îi putem ataşa o categorie mică $\mathcal{C}(M)$ în felul următor: Ob $\mathcal{C}(M) = M$ şi

$$[a, b]_{\mathcal{C}(M)} = \begin{cases} \text{o mulțime cu un singur element: } \{f_{ab}\}, \text{ dacă } a \leqslant b \\ \varnothing, \text{ în caz contrar.} \end{cases}$$

Dacă $(M, \leqslant)$ are prim (ultim) element, categoria $\mathcal{C}(M)$ are obiect inițial (final).

Exemplul I.7.2. **Ens** este categoria ale cărei obiecte sînt toate mulțimile şi ale cărei morfisme sînt aplicațiile între mulțimi.

Exemplul I.7.3. **Ord** este categoria ale cărei obiecte sînt mulțimile parțial ordonate şi ale cărei morfisme sînt aplicațiile izotone.

În **Ens** mulțimea vidă $\varnothing$ joacă rolul de obiect inițial, iar orice mulțime cu un element joacă rolul de obiect final.

Clasa mulțimilor finite cu aplicațiile obişnuite dintre ele formează categoria $\mathbf{Ens}_0$, care este o subcategorie plină a categoriei **Ens**.

Ne ocupăm în continuare de unele proprietăți ale categoriilor **Ens** şi **Ord**.

Teorema I.7.4. $f \in [A, B]_{\mathbf{Ens}}$ *este monomorfism dacă şi numai dacă* f *este aplicație injectivă.*

Demonstrație. Dacă f este o aplicație injectivă şi dacă $g, h \in [C, A]_{\mathbf{Ens}}$ cu $fg = fh$, atunci oricare ar fi $c \in C$ avem $f(g(c)) = f(h(c))$, de unde $g(c) = h(c)$, adică $g = h$.

Reciproc, dacă f este un monomorfism şi $f(a') = f(a'')$, definind $g, h : C \to A$ prin $g(c) = a'$ şi $h(c) = a''$, $\forall\, c \in C$ găsim $f(g(c)) = f(h(c))$ sau $fg = fh$, de unde $g = h$, adică $a' = a''$. ■

Teorema I.7.5. *Dacă* $f \in [A, B]_{\mathbf{Ord}}$ *este monomorfism, atunci* f *este o aplicație izotonă injectivă.*

Demonstrația este similară celei precedente. ■

Teorema I.7.6. $f \in [A, B]_{\mathbf{Ens}}$ *este epimorfism dacă şi numai dacă* f *este o aplicație surjectivă.*

Demonstrație. Să presupunem că $f : A \to B$ este o aplicație surjectivă, cu $B \neq \varnothing$ (ceea ce antrenează $A \neq \varnothing$) şi $g, h : B \to C$ astfel ca $gf = hf$. Dacă $b \in B$ există $a \in A$ astfel ca $b = f(a)$. Atunci $g(b) = g(f(a)) = h(f(a)) = h(b)$, de unde $g = h$.

Reciproc, dacă f este epimorfism şi $B \neq \varnothing$ atunci şi $A \neq \varnothing$.

Într-adevăr, fie C o mulțime cu cel puțin două elemente, $c_1, c_2 \in C$. Definim $g(b) = c_1$, $h(b) = c_2$, $\forall b \in B$.

Atunci, pe de o parte $gf \neq hf$, iar pe de altă parte există un singur morfism de la $A = \varnothing$ în C. Această contrazicere implică $A \neq \varnothing$.

Dacă f n-ar fi aplicație surjectivă, există $b \in B \setminus f(A)$. Fie atunci $C = \{c_1, c_2, c_3\}$ și g, $h : B \to C$, cu $g(b') = h(b') = c_1, \forall\, b' \neq b$ și $g(b) = c_2$, $h(b) = c_3$. Atunci $g \neq h$, dar $gf = hf$, ceea ce contrazice faptul că f este epimorfism. ■

Teorema I.7.7. *Dacă $f \in [A, B]_{\mathrm{Ord}}$ este un epimorfism, atunci f este o aplicație izotonă surjectivă.*

Demonstrație. Se procedează la fel ca în teorema precedentă. ■

Definiția I.7.10. *Produsul categoriilor* $\mathscr{C}_1$ și $\mathscr{C}_2$ este categoria $\mathscr{C}_1 \times \mathscr{C}_2$ alc cărei obiecte sînt perechi ordonate (A_1, A_2) unde $A_1 \in \mathrm{Ob}\, \mathscr{C}_1$, $A_2 \in \mathrm{Ob}\, \mathscr{C}_2$ și ale cărei morfisme sînt date de:

$$[(A_1, A_2), (B_1, B_2)]_{\mathscr{C}_1 \times \mathscr{C}_2} = [A_1, B_1]_{\mathscr{C}_1} \times [A_2, B_2]_{\mathscr{C}_2}.$$

Morfismele se compun pe componente, adică $(f, g)(f', g') = (ff', gg')$ iar $1_{(A_1, A_2)} = (1_{A_1}, 1_{A_2})$.

Propunem cititorului să arate că $(\mathscr{C}_1 \times \mathscr{C}_2)^\circ = \mathscr{C}_2^\circ \times \mathscr{C}_1^\circ$.

În teoria categoriilor, unele rezultate se pot prezenta comod utilizînd noțiunea de diagramă de care ne vom ocupa în cele ce urmează.

Fie $\mathfrak{G} = (V, U, h)$ un multigraf în care fiecare vîrf v are o buclă u_v și $\mathscr{C}$ o categorie.

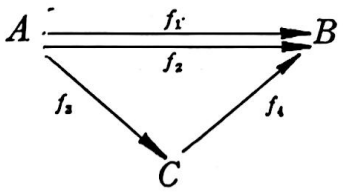
Definiția I. 7.11. O *diagramă de tipul* $\mathfrak{G}$ *în categoria* $\mathscr{C}$ este o aplicație $D : V \cup U \to \mathrm{Ob}\, \mathscr{C} \cup \mathrm{Morf}\, \mathscr{C}$ unde $D(V) \subseteq \mathrm{Ob}\, \mathscr{C}$, $D(U) \subseteq \mathrm{Morf}\, \mathscr{C}$ și oricare ar fi arcul $u \in U$ avem morfismul $D(u) \in [D(a(u)), D(z(u))]_{\mathscr{C}}$.

Multigraful $\mathfrak{G}$ se numește *schema diagramei* D.

Exemplul I. 7.4. Fie $\mathfrak{G} = (\{v_1, v_2, v_3\}, \{u_1, u_2, u_3, u_4, u_{v_1}, u_{v_2}, u_{v_3}\}, h)$, un multigraf, unde $h(u_1) = h(u_2) = (v_1, v_2)$, $h(u_3) = (v_1, v_3)$, $h(v_4) = (v_3, v_2)$ și $\mathscr{C} = \mathbf{Ens}$.

Putem considera diagrama D, unde $D(v_1) = A$, $D(v_2) = B$, $D(v_3) = C$, $D(u_j) = f_j$, $j = \overline{1,4}$, cu $f_1, f_2 : A \to B, f_3 : A \to C$, $f_4 : C \to B$, $D(u_{v_1}) = 1_A$, $D(u_{v_2}) = 1_B$, $D(u_{v_3}) = 1_C$, unde A, B, C sînt mulțimi, iar $f_j, j = \overline{1,4}$ sînt aplicații de mulțimi.

Vom reprezenta diagrama D printr-un desen care va fi numit, printr-un abuz de limbaj, diagramă. Astfel obținem:



În diagramă nu desenăm imaginile buclelor $\{u_v\}$ prin D.

Observația. I.7.A. Fie $w = (u_1, u_2, \ldots, u_m)$ un drum în multigraful $\mathfrak{G}$. Acestui drum îi atașăm morfismul $D(w) = D(u_m) \ldots D(u_2) D(u_1)$. Buclei u îi corespunde morfismul $1_{D(1)}$.

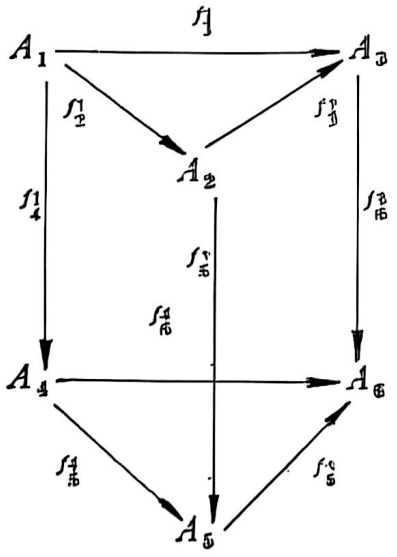
Definiția I.7.12. O *condiție de comutativitate* într-o diagramă este o pereche de drumuri din schema diagramei care au aceleași extremități inițiale și finale.

Definiția I.7.13. Diagrama D *satisface condiția de comutativitate* (w_1, w_2) *dacă* $(w_1, w_2) \in \ker D$.

Convenim că toate diagramele satisfac condițiile de comutativitate: (uu_0, u, u), (u, uu_0), $h(u) = (v_1, v_2)$, $\forall u \in U$.

Definiția I. 7.14. D este o *diagramă comutativă* dacă satisface toate condițiile de comutativitate, adică oricare ar fi drumurile w_1, w_2, cu aceleași extremități, $D(w_1) = D(w_2)$.

Exemplul I.7.5. [H. Schubert [1]]. Fie $\mathcal{C}$ o categorie oarecare și diagrama „*prismatică*".



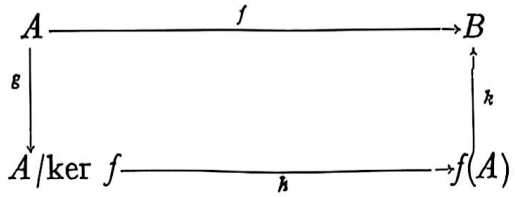
Dacă „baza superioară" este comutativă (adică $f_3^1 = f_3^2 f_2^1$), „fețele laterale" sînt comutative și f_4^1 este un epimorfism atunci „baza inferioară" este comutativă (exercițiu!).

Definiția I. 7.15. O *diagramă de tipul* $\mathfrak{G}/K$ este o diagramă de tipul $\mathfrak{G}$ care satisface mulțimea condițiilor de comutativitate K.

Vom prezenta în continuare proprietățile unor diagrame din **Ens**.

Fie A, B două mulțimi și $f : A \to B$ o aplicație.

Teorema I. 7.8. *(teorema de factorizare a aplicațiilor). Diagrama:*



este comutativă, $g(a) = [a]_{\ker f}$ *este o surjecție,* $h([a]_{\ker f}) = f(a_1)$, $a_1 \in [a]_{\ker f}$ *este o bijecție, iar* $k(f(a)) = f(a)$ *este o injecție.*

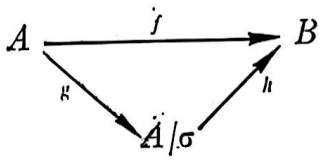
Demonstrație. Aplicația h este bine definită. Într-adevăr, dacă $a_1, a_2 \in [a]_{\ker f}$ avem $f(a_1) = f(a_2) = f(a)$.

Comutativitatea diagramei, adică

$$k(h(g(a))) = f(a),$$

rezultă din $k(h(g(a))) = k(h([a]_{\ker f})) = h([a]_{\ker f}) = f(a)$. ■

Teorema I. 7.9. *Pentru echivalența* $\sigma \subseteq A \times A$ *avem* $\sigma \leqslant \ker f$, *dacă și numai dacă există o aplicație unică* $h : A/\sigma \to B$ *astfel ca diagrama:*



să fie comutativă.

Demonstrație. Să punem $h([a]_\sigma) = f(a')$, $a' \in [a]_\sigma$. Aplicația h este bine definită, deoarece, dacă $a_1, a_2 \in [a]_\sigma$ avem $(a_1, a), (a_2, a) \in \sigma \leqslant \ker f$, deci $f(a_1) = f(a) = f(a_2)$.

Comutativitatea diagramei $h(g(a)) = f(a)$ rezultă imediat.

Să presupunem că ar exista $h_1 : A/\sigma \to B$ astfel ca $h_1 g = hg = f$. Deoarece g este o aplicație surjectivă, în baza teoremei I.7.6, g este epimorfism și prin urmare $h_1 = h$, deci h este unic.

Dacă diagrama este comutativă, $f = hg$, atunci din $[a_1]_\sigma = [a_2]_\sigma$, avem $g(a_1) = g(a_2)$ sau $h(g(a_1)) = h(g(a_2))$ sau $f(a_1) = f(a_2)$. Prin urmare $\sigma \leqslant \ker f$. ■

Consecința I. 7.1. Aplicația f este surjectivă dacă și numai dacă aplicația h este surjectivă.

Într-adevăr, $\forall\, b \in B$, $\exists\, a \in A$ astfel ca $b = f(a)$ și atunci $b = h([a]_\sigma)$

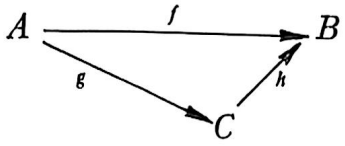
Reciproc, dacă h este surjecție, cum și g este surjecție, compusa lor $f = hg$ este o surjecție (exercițiu!). ■

Consecința I. 7.2. Aplicația h este injectivă dacă și numai dacă $\sigma = \ker f$.

Într-adevăr, dacă h este injectivă, deoarece $h([a]_\sigma) = f(a)$ din $f(a_1) = f(a_2)$ rezultă $[a_1]_\sigma = [a_2]_\sigma$ adică $\ker f \leqslant \sigma$. Cum prin ipoteză $\sigma \leqslant \ker f$ rezultă $\ker f = \sigma$.

Dacă $\ker f = \sigma$ și $h([a_1]_\sigma) = h([a_2]_\sigma)$ atunci $f(a_1) = f(a_2)$ și $[a_1]_\sigma = [a_2]_\sigma$, deci h este injectivă. ■

Teorema I. 7.10. *Fie* $f : A \to B$, $g : A \to C$ *două surjecții cu* $\ker g \leqslant \ker f$. *Există aplicația unică* $h : B \to C$ *care face comutativă diagrama:*



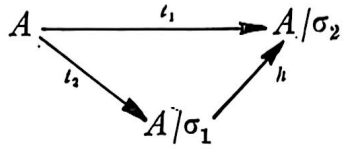
Demonstrație. Deoarece g este o surjecție, $\forall c \in C$, $\exists a \in A$, cu $c = g(a)$. Să definim $h : C \to B$ cu

$$h(c) = f(a).$$

Aplicația h este bine definită, deoarece, dacă $g(a_1) = g(a)$, avem $f(a_1) = f(a)$.

Comutativitatea diagramei este imediată. ■

Consecința I. 7.3. Fie σ_1, $\sigma_2 \in \mathrm{Eq}(A)$, cu $\sigma_1 \leqslant \sigma_2$. Atunci există o aplicație unică $h : A/\sigma_1 \to A/\sigma_2$ astfel ca diagrama



să fie comutativă, unde surjecțiile t_1, t_2 sînt date de $t_j(a) = [a]_{\sigma_j}$, $j = 1, 2$ și $\ker t_2 \leqslant \ker t_1$.

§ 1.8. FUNCTORI

Fie $\mathcal{C}_1$ și $\mathcal{C}_2$ două categorii.

Definiția I.8.1. Un *functor covariant (contravariant)* de la categoria $\mathcal{C}_1$ la categoria $\mathcal{C}_2$, $F : \mathcal{C}_1 \to \mathcal{C}_2$ este o pereche de aplicații, notate ambele cu F, astfel ca:

a) aplicația $F : \mathrm{Ob}\ \mathcal{C}_1 \to \mathrm{Ob}\ \mathcal{C}_2$ atașează fiecărui obiect $A \in \mathrm{Ob}\ \mathcal{C}_1$ obiectul $F(A) \in \mathrm{Ob}\ \mathcal{C}_2$;

b) aplicația $F : \mathrm{Morf}\ \mathcal{C}_1 \to \mathrm{Morf}\ \mathcal{C}_2$ atașează fiecărui morfism $f \in [A, B]_{\mathcal{C}_1}$ morfismul $F(f) \in [F(A), F(B)]_{\mathcal{C}_2}$, $(F(f) \in [F(B), F(A)]_{\mathcal{C}_2})$ așa fel încît:

1) $$F(1_A) = 1_{F(A)},$$

2) $$F(fg) = F(f)F(g) \qquad (F(fg) = F(g)F(f)).$$

Exemplul I.8.1. Fie $\mathcal{C}$ o categorie oarecare. Definim functorul $H^A : \mathcal{C} \to \mathbf{Ens}$, unde $A \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$ prin $H^A(B) = [A, B]_{\mathcal{C}}$ și pentru $B \xrightarrow{f} C$ fie $H^A(f) : [A, B]_{\mathcal{C}} \to [A, C]_{\mathcal{C}}$ cu proprietatea:

$$H^A(f)(h) = fh, \ \forall\, h \in [A, B]_{\mathcal{C}}.$$

Se constată imediat că H^A este un functor covariant.

Apoi, fie $H_A : \mathcal{C} \to \mathbf{Ens}$, cu $H_A(B) = [B, A]_{\mathcal{C}}$ și pentru $B \xrightarrow{f} C$ fie

$$H_A(f) : [C, A]_{\mathcal{C}} \to [B, A]_{\mathcal{C}},$$

cu

$$H_A(f)(h) = hf \qquad \forall\, h \in [C, A]_{\mathcal{C}}.$$

Se arată ușor că H_A este un functor contravariant.

Exemplul I.8.2. Functorul F: **Ord** $\to$ **Ens** care asociază mulțimii parțial ordonate $(M, \leqslant)$ mulțimea M și aplicației izotone $f: M \to N$ aplicația de mulțimi $f : M \to N$ poartă numele de *functor de ștergere.*

Exemplul I.8.3. Fie $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$ două categorii și $A_2 \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}_2$ un obiect fixat. Functorul $F : \mathcal{C}_1 \to \mathcal{C}_2$ pentru care $F(A) = A_2$, $\forall\, A \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}_1$ și $F(f) = 1_{A_2}$ se numește *functor constant.*

Functorul $\mathbf{Id}_{\mathcal{C}} : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$, cu $F(A) = A$ și $F(f) = f$ se numește *functorul identic.*

Observația I.8.1. Un functor covariant (contravariant) $F : \mathcal{C}_1 \to \mathcal{C}_2$ și o pereche de obiecte $A', A'' \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}_1$ determină aplicația de mulțimi

$$F(A', A'') : [A', A'']_{\mathcal{C}_1} \to [F(A'), F(A'')]_{\mathcal{C}_2} \ (F(A', A'') : [A', A'']_{\mathcal{C}_2} \to$$

$$\to [F(A''), F(A')]_{\mathcal{C}_2}).$$

Definiția I.8.2. Functorul $F : \mathcal{C}_1 \to \mathcal{C}_2$ este un functor:

a) *fidel,* dacă $\forall\, A', A'' \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}_1$ aplicația $F(A', A'')$ este injectivă;

b) *deplin,* dacă $\forall\, A', A'' \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}_1$ aplicația $F(A', A'')$ este surjectivă;

c) *deplin fidel,* dacă este fidel și deplin;

d) *injectiv (monofunctor),* dacă din $F(A') = F(A'')$ rezultă $A' = A''$;

e) *surjectiv (epifunctor),* dacă $\forall\, A_2 \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}_2$ există $A_1 \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}_1$ cu $F(A_1) = A_2$;

f) *bijectiv,* dacă este monofunctor și epifunctor;

g) *conservativ,* dacă din faptul că $F(f)$ este izomorfism în $\mathcal{C}_2$ rezultă că f este izomorfism în $\mathcal{C}_1$;

h) *izomorfism de categorii* dacă este deplin fidel și bijectiv.

Dacă $F : \mathcal{C}_1 \to \mathcal{C}_2$ este izomorfism de categorii, atunci categoria $\mathcal{C}_1$ este izomorfă cu categoria $\mathcal{C}_2$.

Fie $\langle \mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2 \rangle$ clasa functorilor covarianți de la categoria $\mathcal{C}_1$ la categoria $\mathcal{C}_2$.

Definiția I.8.3. Un *morfism functorial* $\alpha : F' \to F''$, unde $F', F'' \in \langle \mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2 \rangle$ este o familie de morfisme $\{\alpha_A \mid A \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}_1\}$ care fac comutative diagramele:

$$\begin{array}{ccc} F'(A) & \xrightarrow{\alpha_A} & F''(A) \\ {\scriptstyle F'(f)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle F''(f)} \\ F'(B) & \xrightarrow[\alpha_B]{} & F''(B) \end{array}$$

oricare ar fi $A, B \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}_1$ și $f \in [A, B]_{\mathcal{C}_1}$. Morfismele $\{\alpha_A\} \subseteq \mathrm{Morf}\,\mathcal{C}_2$ se numesc *componentele morfismului functorial* α.

Morfismele functoriale $\alpha, \beta : F_1 \to F_2$ sînt egale dacă componentele lor sînt egale, $\alpha_A = \beta_A, \forall A \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$. Fie $F_1 \xrightarrow{\alpha} F_2 \xrightarrow{\beta} F_3$. Atunci morfismul functorial $F_1 \xrightarrow{\beta\alpha} F_3$ are drept componente $(\beta\alpha)_A = \beta_A \alpha_A$.

Observația I.8.2. Clasa functorilor covarianți $\langle \mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2 \rangle$ poate fi organizată ca o supercategorie ale cărei obiecte sînt functorii covarianți de la $\mathcal{C}_1$ la $\mathcal{C}_2$ și ale cărei morfisme sînt morfismele functoriale între acești functori, notată cu **Funct** $(\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2)$.

În general **Funct** $(\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2)$ este o supercategorie proprie, în sensul că $(F', F'')_{\mathbf{Funct}(\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2)}$ este o clasă, după cum rezultă din:

Exemplul I.8.4. [Popescu, N.; Radu, A. [1]]. Fie $\mathcal{C}$ o categorie pentru care $\mathrm{Ob}\,\mathcal{C} = \{A\}$, $\mathrm{Morf}\,\mathcal{C} = \{1_A\}$. Familia $\langle \mathcal{C}, \mathbf{Ens} \rangle$ este o clasă deoarece fiecărui element din Ob **Ens** (adică fiecărei mulțimi M) i se poate atașa un functor covariant $F_M : \mathcal{C} \to \mathbf{Ens}$, cu $F_M(A) = M$ și Ob **Ens** este o clasă.

Fie $\mathcal{C}$ o categorie pentru care Ob $\mathcal{C}$ este o clasă. Să construim categoria $\mathcal{C}'$ astfel ca $\mathrm{Ob}\,\mathcal{C}' = \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$ și:

$$[X, Y]_{\mathcal{C}'} = \begin{cases} \emptyset, \text{ dacă } X \neq Y \\ \{1_X = f_X^0, f_X^1, \ldots, f_X^n, \ldots\}, \text{ dacă } X = Y, f_X \in [X, Y]_{\mathcal{C}} \\ \qquad \text{și } f_X^m \cdot f_X^n = f_X^{m+n}. \end{cases}$$

Să considerăm pentru orice $X \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}'$ un morfism $f_X^n \in [X, Y]_{\mathcal{C}'}$.

Familia $\{f_X^n \mid X \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}'\}$ constituie componentele unui morfism functorial $\alpha : \mathbf{Id}_{\mathcal{C}'} \to \mathbf{Id}_{\mathcal{C}'}$, diagrama

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f_X^n} & X \\ {\scriptstyle f_X^m}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f_X^m} \\ X & \xrightarrow[f_X^n]{} & X \end{array}$$

fiind comutativă, deoarece: $f_X^n \cdot f_X^m = f_X^{n+m} = f_X^m \cdot f_X^n$.

Cum Ob $\mathcal{C}'$ este o clasă, rezultă că $[\mathbf{Id}_{\mathcal{C}'}, \mathbf{Id}_{\mathcal{C}'}]_{\mathbf{Funct}(\mathcal{C}',\mathcal{C}')}$ formează o clasă și deci $\mathbf{Funct}(\mathcal{C}', \mathcal{C}')$ este o supercategorie.

Teorema I.8.1. *Dacă componentele* $\{\alpha_A \mid A \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}\}$ *ale morfismului functorial* $\alpha : F_1 \to F_2$ *sînt monomorfisme (epimorfisme, bimorfisme, izomorfisme) în* $\mathcal{C}'$ *atunci morfismul functorial* α *este monomorfism (epimorfism, bimorfism, izomorfism).*

Demonstrație. Fie $\alpha: F_1 \to F_2$ un monomorfism functorial și să presupunem că $\alpha\beta = \alpha\gamma$, unde β, $\gamma: F_0 \to F_1$. Pe componente aceasta revine la $\alpha_A\beta_A = \alpha_A\gamma_A$ și cum α_A este monomorfism, obținem $\beta_A = \gamma_A, \forall A \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$, deci $\beta = \gamma$. Analog se procedează pentru celelalte cazuri. ■

Prin analogie cu categoria functorilor **Funct** $(\mathcal{C}, \mathcal{C}')$ putem vorbi de categorii de diagrame.

Fie D_1, D_2 două diagrame de tip $\mathfrak{G} = (V, U, h)$, în $\mathcal{C}$. Un *morfism de diagrame* este o familie de morfisme $\{\alpha_v \mid v \in V\}$ care fac comutative diagramele

$$\begin{array}{ccc} D_1(v') & \xrightarrow{\alpha_{v'}} & D_2(v') \\ {\scriptstyle D_1(u)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle D_2(u)} \\ D_1(v'') & \xrightarrow[\alpha_{v''}]{} & D_2(v'') \end{array}$$

oricare ar fi v', v'' și u, cu $h(u) = (v', v'')$, adică $D_2(u)\alpha_{v'} = \alpha_{v''}D_1(u)$.

Definiția I.8.4. *Categoria diagramelor* de tipul $\mathfrak{G}$ în $\mathcal{C}$, **Diag** $(\mathfrak{G}, \mathcal{C})$ este categoria ale cărei obiecte sînt diagramele de tip $\mathfrak{G}$ în $\mathcal{C}$ și ale cărei morfisme sînt morfismele de diagrame.

Observația I.8.3. Categoria diagramelor care satisfac condițiile de comutativitate K este categoria ale cărei obiecte sînt diagramele din $\mathfrak{G}/K$ și ale cărei morfisme sînt morfismele de diagrame. O vom nota cu **Diag** $(\mathfrak{G}/K, \mathcal{C})$. Ea este o subcategorie plină a categoriei **Diag** $(\mathfrak{G}, \mathcal{C})$.

Vom atașa schemei de diagramă $\mathfrak{G}$ și condițiilor de comutativitate K o relație de echivalență σ_K pe mulțimea drumurilor W, a multigrafului $\mathfrak{G}$.

Anume, $(w', w'') \in \sigma_K$ cînd există un șir finit de drumuri $w' = w_1, w_2, \ldots, w_n = w''$ astfel încît w_j se obține din w_{j-1} prin înlocuirea unui subdrum al lui w_{j-1}, fie el w'_{j-1} prin w''_{j-1}, cu $(w'_{j-1}, w''_{j-1}) \in K$, $j = \overline{2, n}$.

Astfel, două drumuri echivalente w' și w'' au aceeași extremitate inițială și finală.

Putem organiza atunci *ca o categorie* $\mathcal{C}(\mathfrak{G}/K)$, schema de diagramă $\mathfrak{G}$, cu condițiile de comutativitate K luînd $\mathrm{Ob}\,\mathcal{C}(\mathfrak{G}/K) = V$ și $\mathrm{Morf}\,\mathcal{C}(\mathfrak{G}/K) = W/\sigma_K$.

Observația I.8.4. Fie $K = \varnothing$. Atunci obținem $\sigma_\varnothing = \{(1_v u, u), (u, u\,1_{v'}) \mid h(u) = (v, v'),\ u \in U\}$ și avem:

$$[1_v]_{\sigma_\varnothing} \cdot [u]_{\sigma_\varnothing} = [u]_{\sigma_\varnothing} = [u]_{\sigma_\varnothing} \cdot [1_{v'}]_{\sigma_\varnothing}.$$

Astfel multigraful $\mathfrak{G} = (V, U, h)$ cu condițiile de comutativitate $\{(1_v u, u), (u, u 1_{v'}) \mid u \in U, h(u) = (v, v')\}$ poate fi interpretat și ca o categorie notată cu $\mathcal{C}(\mathfrak{G})$.

Observația I.8.5. Fie $\mathcal{C}$ o categorie. Oricărei diagrame de tip $\mathfrak{G}/K$ în $\mathcal{C}$ i se poate atașa un functor de la $\mathcal{C}(\mathfrak{G}/K)$ la $\mathcal{C}$. Morfismele de diagrame devin morfisme între functorii corespunzători și deci **Diag** $(\mathfrak{G}/K, \mathcal{C})$ este o categorie izomorfă cu **Funct** $(\mathcal{C}(\mathfrak{G}/K), \mathcal{C})$.

Fie $\mathcal{C}$ o categorie. Să presupunem că pe fiecare mulțime $[A, B]_{\mathcal{C}}$ este introdusă o relație de echivalență σ_{AB} astfel ca, dacă $(f_1, f_2) \in \sigma_{AB}$, $(g_1, g_2) \in \sigma_{BC}$ atunci $(g_1 f_1, g_2 f_2) \in \sigma_{AC}$.

Definiția I.8.5. *Categoria cît a categoriei $\mathcal{C}$ față de clasa* $\{\sigma_{AB} \mid A, B \in \mathrm{Ob}\, \mathcal{C}\}$ este categoria $\widetilde{\mathcal{C}}$ cu $\mathrm{Ob}\, \widetilde{\mathcal{C}} = \mathrm{Ob}\, \mathcal{C}$, $[A, B]_{\widetilde{\mathcal{C}}} = [A, B]_{\mathcal{C}}/\sigma_{AB}$, *iar proiecția canonică a categoriei cît este functorul* $P: \mathcal{C} \to \widetilde{\mathcal{C}}$ cu $P(A) = A, \forall A \in \mathrm{Ob}\, \mathcal{C}$, $P(f) = [f]\sigma_{AB}$, $\forall f \in [A, B]_{\mathcal{C}}$.

Teorema I.8.2. *Fie $\mathfrak{G}$ o schemă de diagramă și K_1, K_2 mulțimi de condiții de comutativitate pentru $\mathfrak{G}$. Atunci $\mathcal{C}(\mathfrak{G}/K_1 \cup K_2)$ este o categorie cît a categoriei $\mathcal{C}(\mathfrak{G}/K_1)$.*

Demonstrație. Rezultă imediat în baza consecinței I.7.2. ■

§ 1. 9. LIMITE PROIECTIVE

Fie $\mathcal{C}$ o categorie și $\mathfrak{G} = (V, U, h)$ o schemă de diagramă. Vom atașa obiectului $A \in \mathrm{Ob}\, \mathcal{C}$ diagrama constantă $A^{\mathfrak{G}}$ cu proprietățile:

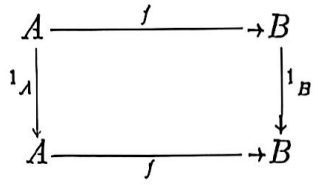
$$A^{\mathfrak{G}}(v) = A, \forall v \in V,$$

$$A^{\mathfrak{G}}(u) = 1_A, \forall u \in U.$$

Observația I.9.1. Orice morfism $f \in [A, B]_{\mathcal{C}}$ induce un morfism de diagrame $f^{\mathfrak{G}}: A^{\mathfrak{G}} \to B^{\mathfrak{G}}$ ale cărui componente sînt $f_v^{\mathfrak{G}} = f$, întrucît diagrama

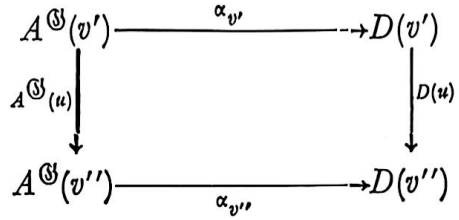
$$\begin{array}{ccc} A^{\mathfrak{G}}(v') & \xrightarrow{f^{\mathfrak{G}}_{v'}} & B^{\mathfrak{G}}(v') \\ {\scriptstyle A^{\mathfrak{G}}(u)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle B^{\mathfrak{G}}(u)} \\ A^{\mathfrak{G}}(v'') & \xrightarrow[f^{\mathfrak{G}}_{v''}]{} & B^{\mathfrak{G}}(v'') \end{array}$$

este comutativă deoarece ea este, de fapt, diagrama



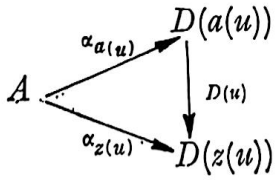
Fie acum D o diagramă de tip $\mathfrak{G}$ în $\mathcal{C}$ și α un morfism de diagrame $\alpha\colon A^{\mathfrak{G}} \to D$, astfel încît componentele sale $\{\alpha_v \mid v \in V\}$ fac comutative diagramele

(I.9.1)



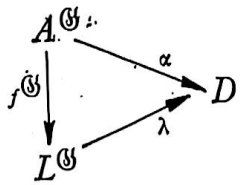
$$\forall u \in U,\ h(u) = (v', v'').$$

Diagrama I.9.1 revine în fond la diagrama comutativă



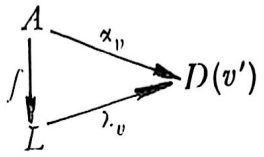
Observația I.9.2. Morfismul de diagrame $\alpha\colon A^{\mathfrak{G}} \to D$ poate fi interpretat ca un element al produsului cartezian: $\prod_{v \in V} [A, D(v)]_{\mathcal{C}}$ care satisface condiția $D(u)\ \alpha_{a(u)} = \alpha_{z(u)}$.

Definiția I.9.1. O *limită proiectivă* a unei diagrame D de tip $\mathfrak{G}$ în $\mathcal{C}$ este o pereche (L, λ) unde $L \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$ și λ este un morfism de diagrame, $\lambda\colon L^{\mathfrak{G}} \to D$ astfel ca pentru orice morfism de diagrame $\alpha\colon A^{\mathfrak{G}} \to D$ există un morfism unic $f \in [A, L]_{\mathcal{C}}$ care face comutativă diagrama



v. obs. I. 9.1), *(proprietatea de universalitate* a limitei proiective).

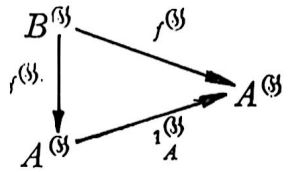
Observația I.9.3. Dacă în schema de diagramă $\mathfrak{G}$ avem arcul u, cu $h(u) = (v, v')$, atunci faptul că (L, λ) este limita proiectivă a diagramei D revine la existența unui morfism unic $f: A \to L$ care face comutative diagramele



$\forall u \in U$, adică $\lambda_v f = \alpha_v$.

Teorema I.9.1. *Fie A un obiect final în $\mathcal{C}$. Dacă $\mathfrak{G}$ este o schemă de diagramă atunci $A^{\mathfrak{G}}$ are limita proiectivă $(A, \{1_A\})$.*

Demonstrație. Cum A este un obiect final, $[B, A]_{\mathcal{C}} = \{f\}$. Atunci dacă există morfismul de diagrame $\alpha: B^{\mathfrak{G}} \to A^{\mathfrak{G}}$ acest morfism este unic și anume $\alpha = f^{\mathfrak{G}}$ și diagrama



este comutativă. ■

Fie $(M, \leqslant)$ o mulțime parțial ordonată. Vom construi o schemă de diagramă $\mathfrak{G}_M = (M, U, h)$ unde $U = \{u_{m'm''} \mid h(u_{m'm''}) = (m', m''), m' \geqslant m''\}$.

Definiția I.9.2. Un *sistem proiectiv* în categoria $\mathcal{C}$ este o diagramă D_M de tipul $\mathfrak{G}_M$ în $\mathcal{C}$, așa fel încît:

a) $D_M(u_{mm}) = 1_{D(m)}$,

b) oricare ar fi $m_j \in M$, $j = \overline{1,3}$, $m_1 \leqslant m_2 \leqslant m_3$ avem:

$$D_M(u_{m_1m_2})\, D_M(u_{m_2m_3}) = D_M(u_{m_1m_3}).$$

Vom nota $D_M(m) = A_m$ și $D_M(u_{mm'}) = f_{mm'}$, $D_M = (\{A_m \mid m \in M\}, \{f_{mm'} \mid m, m' \in M\})$, iar o limită proiectivă a diagramei D_M va fi notată cu $\varprojlim_{m \in M} \{A_m, f_{mm'}\}$.

Exemplul I.9.1. În categoria **Ens** orice sistem proiectiv posedă o limită proiectivă. Fie $D_M = (\{A_m \mid m \in M\}, \{f_{mm'} \mid m, m' \in M\})$ un sistem proiectiv în **Ens** și $A = \prod_{m \in M} A_m$ produsul cartezian al mulțimilor A_m. Mulțimea $L = \{(a_m) \mid m \in M, f_{mm'}(a_{m'}) = a_m, m \leqslant m'\} \subseteq A$ și aplicațiile $\lambda_m: L \to A_m$ definite prin:

$$\lambda_{m'}((a_m)_{m \in M}) = a_{m'}$$

constituie o limită proiectivă (L, λ) a sistemului proiectiv considerat.

Să observăm că aplicaţiile $(\lambda_m)_{m\in M}$ constituie un morfism de diagrame de la $L^{\mathfrak{G}_M}$ la diagrama D_M. Pentru aceasta vom observa că are loc egalitatea

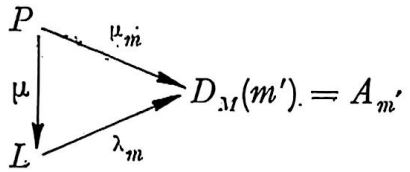
$$\lambda_m = f_{mm'}\lambda_{m'}, \quad \text{pentru} \quad m \leqslant m',$$

deoarece $\lambda_m((a_{m_1})) = a_m = f_{mm'}(\lambda_{m'}(a_{m_1})) = f_{mm'}(a_{m'})$, pentru $m \leqslant m'$, conform definiţiei mulţimii L.

Apoi, fie mulţimea P şi aplicaţiile $\{\mu_m\}_{m\in M}$, $\mu_m\colon P \to A_m$, care constituie componentele unui morfism de diagrame $\mu\colon P^{\mathfrak{G}_M} \to D_M$, adică $\mu_m = f_{mm'}\mu_{m'}$ pentru $m \leqslant m'$.

Să observăm că oricare ar fi $p\in P$, $(\mu_m(p))_{m\in M}\in L$.

Fie aplicaţia $\mu\colon P \to L$, cu $\mu(p) = (\mu_m(p))_{m\in M}$. Atunci diagrama



este comutativă pentru orice m, m', cu $m \leqslant m'$, deoarece

$$\lambda_m(\mu(p)) = \lambda_m(\mu_{m_1}(p)_{m_1\in M}) = \mu_m(p),$$

şi morfismul μ este unic cu această proprietate.

Fie $\{A_m \mid m\in M\}$ o familie de obiecte din $\mathcal{C}$ indexată după mulţimea M. Vom considera pe M ca mulţime parţial ordonată (M, ι_M).

Definiţia I.9.3. Un *produs direct* al familiei de obiecte $\{A_m \mid m\in M\}$ este o limită proiectivă a diagramei D de tipul $\mathfrak{G}^M$ în $\mathcal{C}$, cu $D(m) = A_m$.

Observaţia I.9.4. Produsul direct al unei familii de obiecte pentru care $M = \varnothing$ este prin convenţie un obiect final.

Observaţia I.9.5. Fie (L, λ) o limită proiectivă a diagramei D. Deoarece $\iota_M = \{(m, m) \mid m\in M\}$, componentele morfismului de diagrame λ date de $\lambda_m\colon L \to A_m$ se numesc *proiecţii canonice ale produsului* şi se notează cu $\lambda_m = \mathrm{pr}_m$, iar L se va nota cu $\prod_{m\in M} A_m$.

Definiţia I.9.4. O categorie cu *produse directe* este o categorie în care orice familie de obiecte indexate după o mulţime posedă un produs direct.

Exemplul I.9.2. În **Ens** produsul direct al familiei $\{A_m \mid m\in M\}$ este produsul cartezian $\prod_{m\in M} A_m$ cu proiecţii canonice $\mathrm{pr}_m\colon \prod_{m\in M} A_m \to A_m$.

Definiţia I.9.5. *Suma directă* a familiei de obiecte din $\mathcal{C}$ $\{A_m \mid m\in M\}$ este produsul direct (λ, L) al acestei familii în categoria duală $\mathcal{C}^\circ$. Vom numi morfismele $\lambda_m\colon A_m \to L$ *injecţii canonice*, iar L va fi notat cu $L = \coprod_{m\in M} A_m$.

§ I.10. NOȚIUNI DE ALGEBRĂ UNIVERSALĂ

Definiția I.10.1. Un *domeniu de operatori* este o pereche (Δ, α), unde Δ este o mulțime și α: $\Delta \to N$. Elementele lui Δ se numesc *operatori*, iar $\alpha(f)$, unde $f \in \Delta$ este *aritatea* operatorului f. Dacă $\alpha(f) = n$, f este numit încă operator n-ar, iar $\Delta(n) = \{f \mid f \in \Delta,\ \alpha(f) = n\}$.

Definiția I.10.2. O Δ-*algebră* este tripletul $[M, \Delta, \delta]$, unde M este o mulțime numită *suportul* Δ-*algebrei*; Δ este un domeniu de operatori, $\delta = \{\delta_n \mid n \in N\}$ este o familie de aplicații δ_n: $\Delta(n) \to M^{M^N}$, care deci atribuie oricărui simbol $f \in \Delta$ (n) o operație n-ară pe M, $\delta_n(f)$: $M^n \to M$.

Pentru simplitate vom nota

$$\delta_n(f)(m_1, \ldots, m_n) = f(m_1, \ldots, m_n),$$

iar pentru Δ-algebra $[M, \Delta, \delta]$ vom scrie doar $[M, \Delta]$.

Dacă domeniul Δ este precizat, vom vorbi pur și simplu de algebre, iar dacă $\Delta = \{f_j \mid j \in J\}$ vom nota algebra și cu $[M, \{f_j\}_{j \in J}]$.

Observația I.10.1. În cazul $n = 0$, obținem operațiile zeroare, al căror domeniu de definiție este $\varnothing$, cu valori în mulțimea M. Rolul lor este „selecționarea" unui element din suportul algebrei și din acest motiv se mai numesc *operatori constanți*.

Definiția I.10.3. *O subalgebră* a Δ-algebrei $[M, \Delta]$ este o pereche $[M_1, \Delta]$, unde $M_1 \subseteq M$ și

$$\forall \{m_1, \ldots, m_n\} \subseteq M_1 \to f(m_1, \ldots, m_n) \in M_1,\ \forall f \in \Delta\ (n).$$

*Observația I.*10.2. $[\varnothing, \Delta]$ este subalgebră a Δ-algebrei $[M, \Delta]$ dacă și numai dacă $\Delta(0) = \varnothing$, adică Δ-algebra $[M, \Delta]$ nu are aplicații 0-are, care definite pe $\varnothing$ au valori în M.

O *subalgebră proprie* a Δ-algebrei $[M, \Delta]$ este o subalgebră diferită de subalgebra banală $[M, \Delta]$ (în cazul în care $\Delta(0) \neq \varnothing$) sau diferită de subalgebrele banale $[\varnothing, \Delta]$ și $[M, \Delta]$ (cînd $\Delta(0) = \varnothing$).

Definiția I.10.4. Un *homomorfism de* Δ-*algebre* $[M', \Delta]$, $[M'', \Delta]$ este o aplicație h: $M' \to M''$ cu proprietatea
$h(f(m'_1, \ldots, m'_n)) = f(h(m'_1), \ldots, h(m'_n)),\ \forall f \in \Delta(n),\ m'_1, \ldots, m'_n \in M'$.

Definiția I.10.5. *Produsul direct* al Δ-algebrelor $[M', \Delta]$, $[M'', \Delta]$ este Δ-algebra $[M', \Delta] \times [M'', \Delta] = [M' \times M'', \Delta]$

$$f((m'_1, m''_1), \ldots, (m'_n, m''_n)) = (f(m'_1, \ldots, m'_n), f(m''_1, \ldots, m''_n)),$$

oricare ar fi $f \in \Delta(n)$, $m'_j \in M'$, $m''_j \in M''$, $j = \overline{1, n}$.

Definiția I.10.6. O *congruență* σ pe o Δ-algebră $[M, \Delta]$ este o echivalență $\sigma \in \mathbf{Eq}(M)$ cu

$$\forall\, (m_j', m_j'') \in \sigma,\ j = \overline{1, n} \rightarrow (f(m_1', \ldots, m_n'), f(m_1'', \ldots, m_n'')) \in \sigma\ \forall f \in \Delta(n)$$

Mulțimea congruențelor pe Δ-algebra $[M, \Delta]$ se va nota cu $\widetilde{\mathbf{Eq}}(M)$.

Observația I.10.3. O congruență σ este o subalgebră a produsului direct $[M, \Delta] \times [M, \Delta]$ (exercițiu!).

Teorema I.10.1. *Fie* $\{\sigma_j\}_{j \in J}$ *o familie de congruențe pe o* Δ*-algebră* $[M, \Delta]$. *Echivalența* $\sigma = \bigwedge_{j \in J} \sigma_j$ *(unde intersecția a fost făcută în* $\mathbf{Eq}(M)$*) este o congruență. Dacă* σ_1 *și* σ_2 *sînt congruențe echivalența* $\sigma_1 \vee \sigma_2$ *(unde reuniunea este realizată în* $\mathbf{Eq}(M)$*) este o congruență.*

Demonstrația este imediată. ■

Consecința I.10.1 Mulțimea $\widetilde{\mathbf{Eq}}(M)$ formează o sublatice a laticei echivalențelor $\mathbf{Eq}(M)$.

Consecința I.10.2. Congruențele pe Δ-algebra $[M, \Delta]$ concepute ca submulțimi ale produsului cartezian $M \times M$ formează un sistem de închidere. Putem astfel vorbi de congruența generată de o familie de perechi de elemente ale lui M, ca fiind cea mai mică congruență care identifică perechile date.

Observația I.10.4. Echivalența nucleară a unui homomorfism de Δ-algebre, $h: [M', \Delta] \rightarrow [M'', \Delta]$ este o congruență, pe $[M', \Delta]$ (exercițiu!).

Exemplul I.10.1. Un *semigrup* este o Δ-algebră $[W, \Delta]$ cu

$$\Delta(n) = \begin{cases} \varnothing, \text{ dacă } n \neq 2 \\ \{*\}, \text{ dacă } n = 2, \end{cases}$$

avînd proprietatea:

$$\forall\, w_1, w_2, w_3 \in W,\ (w_1 * w_2) * w_3 = w_1 * (w_2 * w_3),$$

numită lege de asociativitate (v. și exemplul I.10.1).

Fie $[W_j, \{*\}]$, $j = 1, 2$ două semigrupuri. Un *homomorfism* de *semigrupuri* este o aplicație $h: W_1 \rightarrow W_2$ cu proprietatea

$$h(w' * w'') = h(w') * h(w''),\ \forall\, w', w'' \in W_1.$$

Fie $[W, \{*\}]$ un semigrup; $\sigma \in \mathrm{Eq}(W)$ este o *congruență* pe semigrupul $[W, \{*\}]$ dacă din $(w', w'') \in \sigma$ rezultă $(w * w', w * w'') \in \sigma$ și $(w' * w, w'' * w) \in \sigma$ și o *congruență la dreapta* dacă are loc doar $(w' * w, w'' * w) \in \sigma$, $\forall\, w \in W$.

Se arată imediat că și mulțimea congruențelor la dreapta $\widetilde{\mathbf{Eqd}}(W)$ pe semigrupul $[W, \{*\}]$ este o sublatice a laticei $\mathbf{Eq}(W)$.

Vom nota pentru simplitate, uneori, în loc de $w' * w''$ pur și simplu $w'w''$ și W în loc de $[W, \{*\}]$.

Exemplul I.10.2. Un *grup* este o Δ-algebră $[G, \Delta]$ cu

$$\Delta(n) = \begin{cases} \emptyset & n > 2, \\ \{*\} & n = 2, \\ \{^{-1}\} & n = 1, \\ \{g_0\} & n = 0, \end{cases}$$

cu proprietățile:

a) $\forall\ g_1, g_2, g_3 \in G,\ (g_1 * g_2) * g_3 = g_1 * (g_2 * g_3)$ (asociativitate),

b) $\forall\ g \in G,\ g * g_0 = g_0 * g = g$ (g_0 fiind numit *element neutru* sau *element unitate*),

c) $\forall\ g \in G,\ g * g^{-1} = g^{-1} * g = g_0$ (g^{-1} fiind rezultatul aplicării operației unare „$^{-1}$" elementului g și numit *element invers* al elementului g).

Cititorul va observa că este suficient să avem în locul proprietăților b) și c) proprietățile „unilaterale":

b') $\forall\ g \in G,\ g * g_0 = g$,

c') $\forall\ g \in G,\ g * g^{-1} = g_0$,

adică din a), b'), c') decurg a), b), c) și reciproc.

Un *grup* este *abelian* dacă $\forall\ g', g'' \in G$, avem $g' * g'' = g'' * g'$ (comutativitate).

Fie $[G_1, \Delta], [G_2, \Delta]$ două grupuri.

Un homomorfism de grupuri este o aplicație $h : G_1 \to G_2$ cu proprietatea

$$h(g' * g'') = h(g') * h(g''),\ \forall g', g'' \in G_1.$$

Cititorul va verifica egalitățile:

a) $h(g_{01}) = g_{02}$, unde g_{0j} este elementul unitate al grupului $[G_j, \Delta]$, $j = 1,2$;

b) $h(g^{-1}) = (h(g))^{-1},\ \forall g \in G_1$.

Pentru simplitate, vom nota $g' * g''$ prin $g'g''$ iar grupul $[G, \Delta]$ prin G.

În paragrafele I.11 și I.12 vom relua noțiunile de grup și semigrup pentru a prezenta unele proprietăți speciale ale lor.

§ I.11. NOȚIUNI DE TEORIA GRUPURILOR

Noțiunea de grup (v. exemplul I.10.2) se poate descrie și cu ajutorul următorului sistem de axiome întîlnit de obicei în cărțile de algebră [v. Creangă, I., Reischer, C. [1]].

Definiția I.11.1. Un *grup* este o mulțime nevidă G prevăzută cu o operație binară care se bucură de următoarele proprietăți:

a) $\forall g_1, g_2, g_3 \in G$, $g_1(g_2 g_3) = (g_1 g_2)g_3$(asociativitate),

b) $\exists g_0 \in G$, astfel ca $\forall g \in G$, $g_0 g = g$; g_0 se numește element neutru sau element unitate,

c) $\forall g \in G$, există un element notat cu g^{-1} numit inversul lui g astfel ca $g^{-1}g = g_0$.

Observația I.11.1. Avem $gg^{-1} = g_0$. Într-adevăr, $g^{-1} = g_0 g^{-1} = (g^{-1}g)\, g^{-1} = g^{-1}(gg^{-1})$. Să notăm cu g' un invers al lui g^{-1}. Atunci $g_0 = g'g^{-1} = (g'g^{-1})(gg^{-1}) = g_0(gg^{-1}) = gg^{-1}$. ■

Observația I.11.2. Pentru $\forall g \in G$ are loc egalitatea $gg_0 = g$. Avem $gg_0 = g(g^{-1}g) = (gg^{-1})\, g = g_0 g = g$. ■

Observația I.11.3. Elementul unitate al grupului este unic și inversul unui element este unic.

Dacă g_0 și g_0' ar fi două elemente unitate în G atunci $g_0 = g_0 g_0' = g_0'$, în baza definiției I.11.1 și observației I.11.2.

Dacă g ar admite două elemente inverse g^{-1} și $\bar{g}$, atunci $gg^{-1} = g\bar{g} = g_0$, de unde, înmulțind la stînga cu g^{-1}, găsim $g^{-1}(gg^{-1}) = g^{-1}(g\bar{g})$ sau $(g^{-1}g)\, g^{-1} = (g^{-1}g)\, \bar{g}$, adică $g^{-1} = \bar{g}$. ■

Observația I.11.4. Dacă $gg_1 = gg_2$ sau $g_1 g = g_2 g$, atunci $g_1 = g_2$(regula de simplificare). Acest fapt se obține imediat înmulțind la stînga, respectiv la dreapta, ambii membri ai egalității cu g^{-1}.

Vom nota cu $|G|$ numărul elementelor grupului G (ordinul lui G).

Definiția I.11.2. Un *complex* K în G este o submulțime $K \subseteq G$.

Pe lîngă operațiile obișnuite cu mulțimi, în mulțimea complexelor unui grup G se mai introduc operațiile descrise în

Definiția I.11.3. *Produsul* complexelor K_1 și K_2 este complexul

$$K = K_1 K_2 = \{k \mid \exists\, k_j \in K_j,\quad j = 1,2,\quad k = k_1 k_2\}.$$

Inversul unui complex K este complexul $K^{-1} = \{k^{-1} \mid k \in K\}$.

Produsul de complexe este asociativ, dar în general nu este comutativ, iar $(K_1 K_2)^{-1} = K_2^{-1} K_1^{-1}$.

Observația I.11.5. Un complex K este subgrup în G, dacă $KK^{-1} \subseteq K$(exercițiu!).

Fie G un grup și H un subgrup în G.

Definiția I.11.4. *Relația de conjugare la dreapla (stînga) după un subgrup* H este relația

$$\delta_H = \{(g_1, g_2) \mid g_1 g_2^{-1} \in H\}, \quad (\sigma_H = \{(g_1, g_2) \mid g_1^{-1} g_2 \in H\}).$$

Observația I.11.6. Relațiile de conjugare δ_H și σ_H sînt congruențe la dreapta, respectiv la stînga. Se verifică imediat că δ_H și σ_H sînt echivalențe și că au loc implicațiile:

$$(g_1, g_2) \in \delta_H \to (g_1 g, g_2 g) \in \delta_H, \quad \forall g \in G,$$

și

$$(g_1, g_2) \in \sigma_H \to (g g_1, g g_2) \in \sigma_H, \quad \forall g \in G.$$

Definiția I.11.5. Elementele mulțimilor cît G/δ_H și G/σ_H se numesc respectiv *complexe de conjugare la dreapta* și *complexe de conjugare la stînga* față de subgrupul H.

Observația I.11.7. Fie $[g]_{\delta_H}$ un complex de conjugare la dreapta față de subgrupul H. Atunci

$$[g]_{\delta_H} = \{g' \mid (g', g) \in \delta_H\} = \{g' \mid g' g^{-1} \in H\} = \{g' \mid g' \in Hg\},$$

adică

$$[g]_{\delta_H}^{r} = Hg.$$

Similar găsim

$$[g]_{\sigma_H} = gH.$$

Să observăm că dacă $(g_1, g_2) \in \delta_H ((g_1, g_2) \in \sigma_H)$, atunci $Hg_1 = Hg_2$ ($g_1 H = g_2 H$), adică

$$[g]_{\delta_H} = Hg_1, \quad \forall\, g_1 \in [g]_{\delta_H} ([g]_{\sigma_H} = g_1 H, \forall g_1 \in [g]_{\sigma_H}).$$

Definiția I.11.6. Un *subgrup normal* sau un *divizor normal* H este un subgrup pentru care

$$[g]_{\delta_H} = [g]_{\sigma_H}, \quad \forall g \in G,$$

adică $Hg = gH$, $\forall g \in G$. Cu alte cuvinte, complexele de conjugare la dreapta coincid cu complexele de conjugare la stînga și vor fi numite complexe de conjugare față de subgrupul normal.

Observația I.11.8. Dacă H este un subgrup normal, atunci $\delta_H = \sigma_H$. Vom nota $\delta_H = \sigma_H = \varepsilon_H$. Avem $G/H = G/\varepsilon_H$.

Complexele $\{g_0\}$ și G (unde g_0 este unitatea grupului G) sînt subgrupuri normale în G numite *subgrupuri normale improprii*. Toate celelalte *subgrupuri normale* se numesc *proprii*. Într-un grup comutativ orice subgrup este un subgrup normal.

Observația I.11.9. Dacă H este un subgrup normal în G, iar K un subgrup oarecare, atunci KH este un subgrup în G în care H este un subgrup normal.

Într-adevăr, $KHH^{-1}K^{-1} \subseteq KHK^{-1} = KK^{-1}H \subseteq KH$ și dacă $g = g_1g_2 \in KH$, $g_1 \in K$, $g_2 \in H$, atunci $gH = g_1g_2H = g_1Hg_2 = Hg_1g_2 = Hg$. ■

Să remarcăm că dacă $g \in K$, avem $g(H \cap K) = gH \cap gK$.

Teorema I.11.1. *Mulțimea complexelor de conjugare față de subgrupul normal H notată cu G/H este un grup față de operația de înmulțire a complexelor.*

Demonstrație. Fie $g_1H, g_2H \in G/H$, cu $(g_1, g_2) \notin \varepsilon_H$. Atunci $(g_1H)(g_2H) = g_1g_2H$. Subgrupul H este element unitate deoarece $g_1H \cdot H = Hg_1H = g_1H$, iar $(g_1H)^{-1} = g_1^{-1}H$, deoarece $g_1Hg_1^{-1}H = Hg_1g_1^{-1}H = H$. ■

Definiția I.11.7. Grupul G/H se numește *grup factor* sau *grupul cît* al lui G față de subgrupul normal H.

Definiția I.11.8. Un *grup simplu* G este un grup care nu conține subgrupuri normale proprii.

Teorema I.11.2. *Mulțimea subgrupurilor (subgrupurilor normale) ale unui grup formează un sistem de închidere.*

Demonstrația este evidentă. ■

Consecința I.11.1. Fie K un complex $K \subseteq G$. Subgrupul $\hat{K}$ generat de K este intersecția tuturor subgrupurilor care-l conțin pe K. Dacă $K = \{g\}$ subgrupul $\{\hat{g}\}$ numit *subgrupul ciclic* generat de g este dat de

$$\{\hat{g}\} = \{g^k \mid k \in Z\}, \quad g^0 = g_0,$$

unde g_0 este unitatea grupului G (exercițiu!).

Teorema I.11.3. *Mulțimea subgrupurilor normale $\mathcal{N}(G)$ ale unui grup formează o latice modulară față de operațiile de intersecție de mulțimi și produs de complexe.*

Demonstrație. Observînd că mulțimea $\mathcal{N}(G)$ este închisă la operațiile de intersecție și produs avem de verificat doar proprietatea de absorbție, adică:

$$H_1 \cap H_1H_2 = H_1, \quad H_1(H_1 \cap H_2) = H_1, \quad \forall H_1, H_2 \in \mathcal{N}(G).$$

Cum $H_1 = H_1 g_0 \subseteq H_1 H_2$ avem $H_1 \cap H_1 H_2 = H_1$. Apoi, deoarece $g_0 \in H_1 \cap H_2$ avem $H_1(H_1 \cap H_2) \supseteq H_1 g_0 = H_1$, iar $H_1 \supseteq H_1 H_1 \supseteq H_1(H_1 \cap H_2)$, deci $H_1 (H_1 \cap H_2) = H_1$.

Laticea $(\mathcal{H}(G), \cap, \cdot)$ este modulară, adică dacă $H_1 \subseteq H_2$, atunci

$$H_1(H \cap H_2) = H_1 H \cap H_2.$$

În baza observației I.6.8 rămîne să arătăm că avem

$$H_1(H \cap H_2) \supseteq H_1 H \cap H_2.$$

Fie $g' \in H_1 H \cap H_2$. Atunci $g' \in H_2$ și $g' \in H_1 H$, deci $g' = g_1 g$, unde $g_1 \in H_1$, $g \in H$. Cum $g = g_1^{-1} g' \in H_1 H_2 \subseteq H_2 H_2 \subseteq H_2$ avem $g \in H \cap H_2$ adică $g' \in H_1 (H \cap H_2)$. ■

Fie G_1 și G_2 două grupuri și $h\colon G_1 \to G_2$ un homomorfism de grupuri.

Teorema I.11.4. *Preimaginea unității* $g_{02} \in G_2$, $H = h^{-1}(g_{02})$ *este un subgrup normal în* G_1 *numit nucleul lui* h *și notat cu* Ker h.

Demonstrație. Dacă $g_1, g_1' \in H$, atunci $h(g_1 (g_1')^{-1}) = h(g_1)\,(h(g_1'))^{-1} = g_{02} g_{02} = g_{02}$, adică $g_1 (g_1')^{-1} \in H$, deci H este subgrup. Apoi $g_1 H = H g_1$, $\forall g_1 \in G_1$, deoarece $h(g_1 H g_1^{-1}) = h(g_1)\, g_{02} (h(g_1))^{-1} = g_{02}$. ■

Definiția I.11.9. Dacă homomorfismul $h\colon G_1 \to G_2$ este ca aplicație de mulțimi o injecție (surjecție), atunci h se numește *homomorfism injectiv (homomorfism surjectiv)*. Un homomorfism injectiv și surjectiv se numește *izomorfism*, iar grupurile G_1 și G_2 se zic izomorfe și se notează $G_1 \cong G_2$.

Teorema I.11.5. *Homomorfismul* $h\colon G_1 \to G_2$ *este injectiv dacă și numai dacă* Ker $h = \{g_{01}\}$.

Demonstrație. Dacă h este injectiv avem evident Ker $h = \{g_{01}\}$.

Reciproc, să presupunem, că Ker $h = \{g_{01}\}$ și $h(g_1') = h(g_1'')$. Atunci $h(g_1'(g_1'')^{-1}) = h(g_1')\,(h(g_1''))^{-1} = g_{02}$, adică $g_1' g_1''^{-1} = g_{01}$, de unde $g_1' = g_1''$. ■

Teorema I.11.6. *Fie* H *un subgrup normal în* G. *Există un homomorfism* h *definit pe* G *al cărui nucleu este* H, Ker $h = H$.

Demonstrație. Fie G/H grupul factor. Aplicația $h\colon G \to G/H$, dată de $h(g) = [g]_{\varepsilon_H}$ este bine definită și este un homomorfism numit *homomorfism natural* (exercițiu!). Deoarece H joacă rolul de unitate în grupul G/H, Ker $h = h^{-1}(H) = \{g \mid gH = Hg = H\} = H$. ■

Consecința I.11.2. Determinarea subgrupurilor normale ale unui grup revine la determinarea tuturor homomorfismelor definite pe grupul respectiv și reciproc.

Vom considera acum categoria grupurilor **Gr** care are ca obiecte grupurile și ca morfisme homomorfismele de grupuri.

Teorema I.11.7. *În* **Gr** *un morfism f este monomorfism dacă și numai dacă este homomorfism injectiv.*

Demonstrație. Fie $f: G_1 \to G_2$ un homomorfism injectiv și morfismele $h_j: G \to G_1$, $j = 1, 2$, cu proprietatea $fh_1 = fh_2$. Atunci $f(h_1(g)) = f(h_2(g))$, $\forall g \in G$ și $f(h_1(g)\,(h_2(g))^{-1}) = g_{02}$, adică $h_1(g)\,(h_2(g))^{-1} = g_{01}$ sau $h_1(g) = h_2(g)$, $\forall g \in G$, deci $h_1 = h_2$.

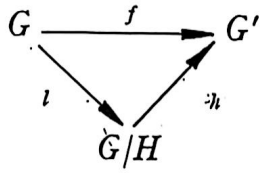
Reciproc, fie $f: G_1 \to G_2$ un monomorfism și să presupunem că există $g_1 \in \operatorname{Ker} f$, $g_1 \neq g_{01}$, atunci fie $t: \{\hat{g}_1\} \to G_1$ homomorfismul identic. Avem $ft = fz$, unde $z: \{\hat{g}_1\} \to G_1$ este dat de $z(g) = g_{01}$, $\forall g \in \{\hat{g}_1\}$, cu $t \neq z$, ceea ce este absurd. ■

Vom utiliza în mod frecvent diagrame în **Gr** pe care le vom numi *diagrame de grupuri.*

Teorema I.11.8. *Fie G/H un grup cît și $f: G \to G'$ un homomorfism de grupuri.*

a) *Există un homomorfism de grupuri $h: G/H \to G'$, astfel încît diagrama*

(I.11.1)



să fie comutativă dacă și numai dacă $H \subseteq \operatorname{Ker} f$, adică l este homomorfismul natural. Dacă h există el este unic.

b) *Dacă există h cu proprietatea din* a), *h este epimorfism dacă și numai dacă f este epimorfism de grupuri.*

c) *Dacă există h cu proprietatea din* a), *atunci h este monomorfism dacă și numai dacă $H = \operatorname{Ker} f$.*

Demonstrație. a) Din $H \subseteq \operatorname{Ker} f$, dacă $(g, g_1) \in \varepsilon_H$ avem $gg_1^{-1} \in H \subseteq \operatorname{Ker} f$, adică $f(gg_1^{-1}) = g_0'$ sau $f(g) = f(g_1)$ deci $(g, g_1) \in \ker f$. Astfel $\varepsilon_H \leqslant \ker f$ și, aplicînd teorema I.7.9, există aplicația h, unic determinată, care face comutativă diagrama (I.11.1) și este un homomorfism de semigrupuri.

Într-adevăr, dacă $[g_j]_{\varepsilon_H} \in G/H$, $j = 1, 2$, atunci

$$h([g_1]_{\varepsilon_H}[g_2]_{\varepsilon_H}) = h(l(g_1)\,l(g_2)) = h(l(g_1g_2)) = f(g_1\,g_2) = f(g_1)\,f(g_2) =$$

$$= h(l(g_1))\,h(l(g_2)) = h([g_1]_{\varepsilon_H})\,h([g_2]_{\varepsilon_H}).$$

Reciproc, este suficient să observăm că din $\varepsilon_H \leqslant \ker f$ rezultă $H \subseteq \operatorname{Ker} f$. Astfel, dacă $g \in H$, avem $g^2 \cdot g^{-1} = g \in H$, adică elementele g^2 și g sînt conjugate după H, $(g^2, g) \in \varepsilon_H$, de unde $(g^2, g) \in \ker f$.

Atunci $(f(g))^2 = f(g)$ adică $f(g) = g_0$ sau $g \in \operatorname{Ker} f$.

b) și c) rezultă imediat din consecințele I.7.1 și I.7.2 respectiv. ■

Observația I.11.10. Dacă $f: G \to G'$ este un homomorfism de grupuri $\ker f = \varepsilon_{\mathrm{Ker}\, f}$ (exercițiu!).

Teorema I.11.9. *Fie $f: G \to G'$ un homomorfism de grupuri. Diagrama*

(I.11.2)

$$\begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{\quad f \quad} & G' \\ {\scriptstyle l}\downarrow & & \uparrow{\scriptstyle k} \\ G/\ker f & \xrightarrow[\quad h \quad]{} & f(G) \end{array}$$

este comutativă, h este un izomorfism de grupuri, l este homomorfismul natural iar k este un homomorfism injectiv, $k(g') = g'$.

Demonstrație. Ținînd seama de teorema I.7.8 și de observația I.11.10 rămîne să verificăm doar că h este un homomorfism de grupuri.

Într-adevăr, dacă notăm $\mathrm{Ker}\, f = H$, atunci

$$h(gHg'H) = h(gH)\, h(g'H),$$

deoarece comutativitatea diagramei (I.11.2) revine la $f(g) = h(gH)$ și $h(gHg'H) = h(gg'H) = f(gg') = f(g)\, f(g') = h(gH) \cdot h(g'H)$. ■

Teorema I.11.10. *(teorema I de izomorfism). Fie H un subgrup normal în G și K un subgrup oarecare al lui G. Atunci $H \cap K$ este un subgrup normal în K și grupurile cît $\frac{KH}{H}$ și $\frac{K}{H \cap K}$ sînt izomorfe* (v. observația I.11.9).

Demonstrație. Homomorfismul injectiv $K \xrightarrow{f} KH$ și homomorfismul natural $KH \xrightarrow{l} KH/H$, implică existența homomorfismului $\varphi = lf: K \to KH/H$.

Homomorfismul φ este surjectiv. Într-adevăr, dacă $gH \in KH/H$, atunci $g = g_1 g_2$, $g_1 \in K$, $g_2 \in H$ și avem $\varphi(g_1) = l(f(g_1)) = l(g_1) = g_1 H = g_1 g_2 H = gH$.

Aplicînd teorema I.11.9. $KH/H \cong K/\ker \varphi$. Dar $\mathrm{Ker}\, \varphi = H \cap K$, deoarece dacă $g \in H \cap K$, $\varphi(g) = H$, deci $g \in \mathrm{Ker}\, \varphi$, iar dacă pentru $g \in K$ avem $g \in \mathrm{Ker}\, \varphi$, avem atunci $\varphi(g) = H$ sau $l(f(g)) = H$, deci $l(g) = H$, adică $g \in H$, deci $g \in H \cap K$. ■

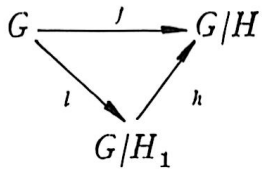
Teorema I.11.11. *(teorema a II-a de izomorfism). Fie G un grup și $H_1 \subseteq H$ două subgrupuri normale ale lui G. Are loc izomorfismul*

(I.11.1)

$$\frac{G}{H} \cong \frac{G/H_1}{H/H_1}$$

Demonstrație. Să observăm că H/H_1 este subgrup normal în grupul G/H_1 (exercițiu!).

Fie homomorfismul natural $f: G \to G/H$. Deoarece $H_1 \subseteq H$, există homomorfismul surjectiv h care face diagrama:

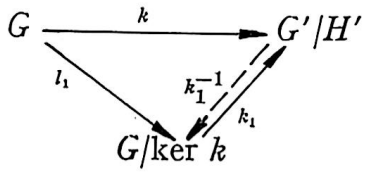


comutativă (v. teorema I.11.8). Observînd că Ker $h = H/H_1$, obținem formula (I.11.1). ■

Teorema I.11.12. *Fie $h: G \to G'$ un homomorfism surjectiv, H un subgrup normal în G și H' un subgrup normal în G'. Atunci $h(H)$ este subgrup normal în G' și $h^{-1}(H')$ este subgrup normal în G.*

Demonstrație. Imaginea $h(H)$ este un subgrup deoarece $h(H)\,(h(H))^{-1} = h(H)\,h(H^{-1}) = h(HH^{-1}) \subseteq h(H)$. Apoi $g'h(H) = h(g)\,h(H) = h(gH) = h(Hg) = h(H)\,h(g) = h(H)g'$, deci $h(H)$ este un subgrup normal în G'.

Din homomorfismele $G \xrightarrow{h} G' \xrightarrow{l} G'/H'$ obținei homomorfismul surjectiv $k = lh$, $k: G \to G'/H'$. Astfel avem izomorfismul $k_1: G/\ker k \to G'/H'$ care face comutativă diagrama (v. teorema I.11.9).



Subgrupul normal Ker k este format din totalitatea elementelor din G care prin homomorfismul k sînt aplicate pe elementul unitate al grupului G'/H', adică acelea care prin homomorfismul h se reprezintă pe subgrupul H', adică Ker $k = h^{-1}(H')$. ■

În laticea $\mathcal{N}(G)$ a subgrupurilor normale ale unui grup există elemente maximale conform unui enunț echivalent cu axioma alegerii. Aceste elemente maximale sînt caracterizate de

Teorema I.11.13. *Subgrupul normal H din G este maximal dacă și numai dacă grupul factor G/H este grup simplu.*

Demonstrație. Fie G/H grup simplu și să presupunem că există un subgrup normal H_1, $H \subset H_1 \subset G$. Fie $l: G \to G/H$ homomorfismul natural. Imaginea $l(H_1)$ este un subgrup normal nebanal în G/H, contrar ipotezei (v. teorema I.11.12).

Reciproc, dacă H este subgrup normal maximal în G, atunci G/H nu poate conține nici un subgrup normal propriu, deoarece, în caz contrar, imaginea inversă a acestui subgrup ar fi un subgrup normal $H_1 \subset G$, cu $H \subset H_1$. ■

Definiția I.11.10. Un *șir normal de subgrupuri* al grupului G este un șir de subgrupuri.

$$G = G_0 \supseteq G_1 \supseteq \ldots \supseteq G_r = \{g_0\},$$

unde G_j este subgrup normal în G_{j-1}, $j = \overline{1, r}$. Grupurile factor G_0/G_1, G_1/G_2, ..., $G_{r-1}/G_r = G_{r-1}$ se numesc *factorii șirului* normal, numărul r se numește *lungimea șirului* iar $\{G_j\}_{j=\overline{0,r}}$ se numesc *termenii șirului.*

Definiția I.11.11. O *rafinare a unui șir normal* este un șir normal care conține toți termenii vechiului șir și în plus alți termeni noi.

Definiția I.11.12. Un *șir de compoziție* este un șir normal care nu se mai poate rafina.

Teorema I.11.14. *Un șir normal este un șir de compoziție dacă și numai dacă factorii șirului sînt grupuri simple.*

Demonstrație. Rezultă imediat din teorema I.11.12. ■

Consecința I.11.3. Într-un șir de compoziție termenul G_j este subgrup normal maximal în G_{j-1}, $j = \overline{1, r}$.

Observația I.11.11. Orice grup G admite cel puțin un șir normal, de exemplu șirul $G = G_0 \supseteq G_1 = \{g_0\}$, dar nu orice grup admite un șir de compoziție, așa cum rezultă din

Exemplul I.11.1. Pentru grupul ciclic de ordin infinit generat de un element a, șirul normal $\{\hat{a}\} \supset \{\hat{a}^p\} \supset \{\hat{a}^{pq_1}\} \supset \ldots \{\hat{a}^{pq_n}\} \supset \{\hat{a}^0\}$ cu $p > 1$, $1 < q_1 < \ldots < q_n$ poate fi totdeauna rafinat prin intercalarea cel puțin a termenului $\{\hat{a}^{pq'}\}$ cu $q_n < q'$ între $\{\hat{a}^{pq_n}\}$ și $\{\hat{a}^0\}$.

Observația I.11.12. Grupurile de ordin finit admit totdeauna șiruri de compoziție, doarece în caz contrar ar exista un lanț infinit de subgrupuri normale proprii.

§ I.12. NOȚIUNI DE TEORIA SEMIGRUPURILOR

Așa după cum am văzut în exemplul I.10.1, un semigrup este o mulțime dotată cu o operație binară asociativă.

Fie W un semigrup. Noțiunea de complex se definește la fel ca la grupuri.

Definiția I.12.1. Un *subsemigrup* W_1 al semigrupului W este un complex cu proprietatea $W_1W_1 \subseteq W_1$, adică W_1 formează semigrup față de operația din W.

Definiția I.12.2. Un *ideal la stînga (dreapta)* în semigrupul W este un subsemigrup W_1 cu proprietatea $WW_1 \subseteq W_1$ ($W_1W \subseteq W_1$). Un *ideal bilateral* sau pe scurt *ideal* este un subsemigrup W_1 care este ideal la stînga și la dreapta.

Într-un semigrup W, $\varnothing$ și W sînt totdeauna ideale, numite *ideale improprii*. Orice ideal $W_1 \neq \varnothing$, W se numește *ideal propriu*.

Definiția I.12.3. *Elementul* w_1 este *idempotent* dacă

$$w_1w_1 = w_1.$$

Definiția I.12.4. Un element w_1 este *unitate la dreapta (stînga)* în semigrupul W, dacă $\forall w \in W$ avem $ww_1 = w (w_1w = w)$. Un *element unitate* este un element unitate la dreapta și la stînga.

Se observă imediat că un element unitate este element idempotent.

Definiția I.12.5. Un *element zero la dreapta (stînga)* în semigrupul W este un element w_0 cu proprietatea $ww_0 = w_0 (w_0w = w_0)$. Un *element zero* este element zero la dreapta și zero la stînga.

Observația I.12.1. Un semigrup W poate să posede sau nu elemente unitate. Astfel semigrupul multiplicativ al numerelor pare nu posedă element unitate.

Este justificată astfel:

Definiția I.12.6. Un *monoid* este un subsemigrup cu element unitate.

Definiția I.12.7. *Monoidul atașat unui semigrup* W este monoidul W^1, unde:

$$W^1 = \begin{cases} W, \text{ dacă } W \text{ are unitate,} \\ W \cup \{e_W\}, \text{ în caz contrar,} \end{cases}$$

unde definim e_W ca unitatea semigrupului W cu proprietatea $we_W = e_Ww = w$, $\forall w \in W$.

Definiția I.12.8. O *mulțime de generatori* a semigrupului W este o submulțime $Y \subseteq W$ care nu este conținută în nici un subsemigrup propriu al lui W.

Observația I.12.2. Ca și în cazul grupurilor, intersecția unei familii oarecare de subsemigrupuri $\{W_j \mid j \in J\}$ este un subsemigrup adică familia subsemigrupurilor unui semigrup formează un sistem de închidere.

Astfel putem considera, oricare ar fi complexul $K \subseteq W$ subsemigrupul $\hat{K}$ generat de K. Pentru $\hat{K}$ complexul K este o mulțime de generatori (exercițiu!).

Fie acum o mulțime de simboluri $Y_n = \{w_j \mid j = \overline{1, n}\}$, numită *alfabet*.

Definiția I.12.9. Un *cuvînt* în alfabetul Y_n este un șir finit $p = \{w_{j_1}, \ldots, w_{j_r}\}$ de simboluri. Vom scrie, pe scurt, $p = w_{j_1} \ldots w_{j_r}$.

Lungimea cuvîntului p este r, vom nota $l(p) = r$.

Definiţia I.12.10. *Semigrupul liber* Y_n^* este mulţimea tuturor cuvintelor din alfabetul Y_n cu operaţia de *concatenare* (sau *juxtapunere*), adică pentru $p = w_{j_1} \dots w_{j_r}, q = w_{k_1} \dots w_{k_s}$

$$p \cdot q = w_{j_1} \dots w_{j_r} w_{k_1} \dots w_{k_s}.$$

Evident, $l(p \cdot q) = l(p) + l(q)$.

Teorema I.12.1. *Fie W un semigrup. Aplicaţia $h: Y_n \to W$ se prelungeşte în mod unic la un homomorfism de semigrupuri $h: Y_n^* \to W$.*

Demonstraţie. Homomorfismul h se obţine punînd

$$h(p) = h(w_{i_1} \dots w_{i_r}) = h(w_{i_1}) \dots h(w_{i_r}) \in W.$$

Dacă aplicaţia h s-ar putea prelungi la două homomorfisme distincte, h_1, $h_2: Y_n^* \to W$, atunci h_1 şi h_2 ar trebui să coincidă pe generatori şi prin urmare ar coincide pentru orice $p \in Y_n^*$, adică $h_1 = h_2$. ■

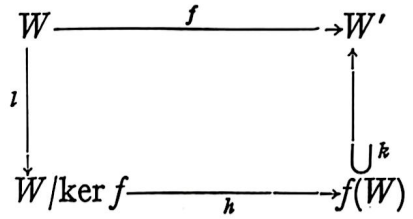
Definiţia I.12.11. *Semigrupul cît* sau *semigrupul factor* al semigrupului W faţă de congruenţa σ este mulţimea cît W/σ cu operaţia

$$[w_1]_\sigma \cdot [w_2]_\sigma = [w_1 w_2]_\sigma$$

Propunem cititorului să verifice buna definire a operaţiei pe W/σ. De asemenea, că nucleul unui homomorfism de semigrupuri ($(w_1, w_2) \in \ker f \leftrightarrow$ $\leftrightarrow f(w_1) = f(w_2)$) este o congruenţă pe W.

Aplicaţia $l: W \to W/\sigma$ dată de $l(w) = [w]_\sigma$ este un homomorfism surjectiv numit *homomorfism natural.*

Teorema I.12.2. *Fie $f: W \to W'$ un homomorfism de semigrupuri. Diagrama*



este comutativă, h este un izomorfism de semigrupuri, l este homomorfismul natural, iar k este un homomorfism injectiv, $k(w') = w'$. ■

Demonstraţie. Se procedează la fel ca la teorema I.11.9. ■

Definiţia I.12.12. *Semigrupul W* este *simplu (simplu la stînga, simplu la dreapta)*, dacă W nu conţine ideale proprii (ideale la stînga proprii, ideale la dreapta proprii).

Definiţia I.12.13. Dacă W are element zero, 0, atunci W este 0-simplu (0-simplu la stînga, 0-simplu la dreapta), dacă singurul ideal propriu este 0 (singurul ideal propriu la stînga este 0, singurul ideal propriu la dreapta este 0).

Observația I.12.3. Dacă W este 0-simplu, $W^2 \neq 0$.

Într-adevăr, dacă $W^2 = 0$, orice subsemigrup $W_1 \subset W$ care-l conține pe **0** este un ideal propriu.

Definiția I.12.14. Subsemigrupul W este *grup la dreapta* dacă W este simplu **la** dreapta și simplificabil la stînga, adică $\forall w_1, w_2 \in W$ există un singur **element** $w \in W$ astfel încît $w_1 w = w_2$.

Definiția I. 12.15. *Semigrupul* W este *nul la dreapta* dacă $\forall w_1, w_2 \in W$, $w_1 w_2 = w_2$.

Observația I.12.4. Orice semigrup nul la dreapta este grup la dreapta **deoarece** oricare ar fi idealul V avem $W = VW \subseteq V \subseteq W$, de unde $V = W$.

Produsul direct a două grupuri la dreapta este un subgrup la dreapta.

Teorema I.12.3. *Orice element idempotent* w_0 *al unui semigrup* W, *simplu la dreapta, este o unitate la stînga în* W.

Demonstrație. Deoarece $w_0 W$ este un ideal la dreapta în W, avem $w_0 W = W$ (W fiind simplu la dreapta).

Oricare ar fi $w \in W$ există un $w_1 \in W$ astfel ca $w_0 w_1 = w$. Atunci

$$w_0 w = w_0^2 w_1 = w_0 w_1 = w. \blacksquare$$

Teorema I.12.4. *Fie* W *un semigrup în care există o unitate la dreapta* w_0 *și* $\forall w \in W$ *există* w_1 *astfel ca* $ww_1 = w_0$, *adică fiecare element are un invers la dreapta. Atunci* W *este un grup.*

Demonstrație. Elementul w_0 este și unitate la stînga și este unic cu această proprietate.

Din $ww_1 = w_0$ rezultă $w_0(ww_1) = w_0 w_0 = w_0$ sau $(w_0 w)\, w_1 = w_0 = ww_1$. Cum w_1 are un invers la dreapta, rezultă $w_0 w = w$, adică w_0 este și unitate la stînga.

Dacă ar mai exista un element unitate $w_0' \neq w_0$ în W, atunci $w_0' = w_0' w_0 = w_0$, ceea ce este absurd. Mai mult, se vede de aici că w_0 este singurul element **unitate** la dreapta din W.

Elementul w_1 din enunțul teoremei joacă rolul de invers la stînga, adică $w_1 w = w_0$.

Într-adevăr, din $ww_1 = w_0$ rezultă $w_1 ww_1 = w_1 w_0 = w_1$.

Cum w_1 are un invers la dreapta, obținem $w_1 w = w_0$. $\blacksquare$

Teorema I.12.5. *Orice semigrup finit* W *posedă un idempotent.*

Demonstrație. Fie $w \in W$. Puterile distincte ale lui w sînt în număr finit **și** deci există r, $m \in N$ astfel ca $w^r = w^{r+m}$. Să alegem pe r și m cele mai mici **numere** cu această proprietate; ele se numesc *perioada*, respectiv *indicele* **elementului** w.

Mulțimea $\{w^r, w^{r+1}, \ldots, w^{r+m-1}\}$ este un grup ciclic de ordin m.

Între cele m numere consecutive $r, r+1, \ldots, r+m-1$ există un multiplu al lui m, fie el n.

Deoarece $w^r = w^{r+n} = w^r \cdot w^n$, w^n este unitatea grupului ciclic deci w^n este idempotent. ■

Consecința I.12.1. Oricare ar fi $w \in W$ există o putere a lui w care este un element idempotent.

Definiția I.12.16. *Produsul direct al semigrupurilor* W_1 și W_2 este semigrupul $W = W_1 \times W_2$, în care operația de înmulțire este

$$(w_1, w_2)(w_1', w_2') = (w_1 w_1', w_2 w_2').$$

Definiția I.12.17. Un *semigrup ciclic* generat de elementul w este un semigrup ale cărui elemente se exprimă ca puteri ale lui w. Indicele și perioada semigrupului ciclic finit W sînt respectiv indicele și perioada elementului generator w.

Teorema I.12.6 [Clifford și Preston[1]]. *Pentru un semigrup* W *următoarele proprietăți sînt echivalente*:

a) W *este un grup la dreapta,*

b) W *este simplu la dreapta și conține un idempotent,*

c) $W \cong G \times W_0$ *în care* G *este un grup și* W_0 *este un semigrup nul la dreapta.*

Demonstrație. a) $\rightarrow$ b). Un grup la dreapta este simplu la dreapta prin definiție. Fie $w \in W$. Deoarece W este simplu la dreapta există $w_0 \in W$ astfel ca $ww_0 = w$. Deci $ww_0^2 = ww_0$ și, prin simplificare la stînga $w_0^2 = w_0$.

b) $\rightarrow$ c). Fie W_0 mulțimea elementelor indempotente ale lui W. Avem $W_0 \neq \emptyset$. În baza teoremei I.12.3, orice element al lui W_0 este o unitate la stînga în W. În particular, $w_0' w_0'' = w_0''$, $\forall w_0', w_0'' \in W_0$ și astfel W_0 este un semigrup nul la dreapta în W.

Vom arăta că în W are loc simplificarea la stînga (de unde va rezulta în plus că b) $\rightarrow$ a)). Fie $w, w_1, w_2 \in W$ cu proprietatea $ww_1 = ww_2$. Fie $w_0 \in W_0$ și fie w' cu proprietatea $ww' = w_0$. (Un astfel de w' există, deoarece W este simplu la dreapta). Fie $v = w'w$, atunci $v^2 = w'ww'w = w'w_0w = w'w = v$, adică v este idempotent și deci unitate la stînga. Deci $w_1 = ww_1 = w'ww_1 = w'ww_2 = vw_2 = w_2$.

Fie $w_0 \in W_0$; atunci Ww_0 este un subsemigrup al lui W avînd w_0 ca unitate. Dacă $w \in Ww_0$ putem rezolva ecuația $wx = w_0$, cu $x \in W$(deoarece W este simplu la dreapta) și atunci $w(xw_0) = w_0^2 = w_0$ și astfel w are un invers la dreapta $xw_0 \in Ww_0$. Astfel Ww_0 este un subgrup al lui W, în baza teoremei I.12.4.

Fie $w_0 \in W_0$ și G grupul Ww_0. Să considerăm produsul direct de semigrupuri $G \times W_0$ și să definim aplicația $\Psi: G \times W_0 \rightarrow W$ prin $\Psi((w, w_0')) = ww_0'$.

Atunci, dacă $w_1, w_2 \in G$ și $w_0', w_0'' \in W_0$ avem:

$$\Psi[(w_1, w_0')(w_2, w_0'')] = \Psi(w_1w_2, w_0'w_0'') = (w_1w_2)(w_0'w_0'') = w_1w_2w_0'',$$

$$\Psi[(w_1, w_0')]\Psi[(w_2, w_0'')] = (w_1w_0')(w_2w_0'') = w_1(w_0'w_2)w_0'' = w_1w_2w_0'',$$

adică Ψ este un homomorfism.

Să presupunem că $\Psi[(w_1, w_0')] = \Psi[(w_2, w_0'')]$, adică $w_1w_0' = w_2w_0''$. Apoi $w_1 = w_1w_0 = w_1w_0'w_0 = w_2w_0''w_0 = w_2w_0 = w_2$. Deci $w_1w_0' = w_1w_0''$ și cum W este stîng simplificabil rezultă și $w_0' = w_0''$, adică Ψ este injectiv.

Fie acum $w \in W$. Ecuația $wx = w$ are o soluție în W. Atunci $wx^2 = wx$ și deci $x^2 = x$, după simplificarea la stînga. Deci $x \in W_0$. Atunci $ww_0 \in Ww_0 = G$ și $\Psi(ww_0, x) = ww_0x = wx = w$, adică Ψ este și surjectiv.

Prin urmare Ψ este un izomorfism și c) este astfel stabilită.

c) $\rightarrow$ a). Cum produsul direct a două grupuri la dreapta este un grup la dreapta și W_0 și G sînt ambele grupuri la dreapta urmează că W este grup la dreapta. ■

Observația I.12.5. În cazul unui semigrup finit existența unui element idempotent (v. condiția b) din teorema I.12.6) este totdeauna asigurată.

Teorema I.12.7. [Arbib [14], Krohn și Rhodes [5]]. *Fie W un semigrup finit. Atunci este valabilă una din următoarele trei afirmații:*

1) *W este un semigrup ciclic,*

2) *W este simplu la dreapta,*

3) *există un ideal propriu la dreapta T și un subsemigrup propriu V al lui W pentru care $W = T \cup V$ și în acest caz, sau:*

a) *există un $w \in W$ astfel ca $V = w \cdot T$, sau*

b) *T este un ideal bilateral.*

Demonstrație. Dacă nu are loc proprietatea 2), atunci există un ideal maximal propriu la dreapta în W, fie el T.

Să presupunem că există $w \in W$ astfel ca $wT \not\subseteq T$. Atunci $wT \cup T$ este un ideal la dreapta care-l conține pe T și astfel $wT \cup T = W$. Atunci $V = wT$ este un subsemigrup propriu, deoarece faptul că W este finit atrage după sine $|wT| \leqslant |T| < |W|$. Astfel sîntem în situația de la punctul 3 a).

Dacă nu există un w cu proprietatea de mai sus, atunci $\forall w \in W$, avem $wT \subseteq T$ și astfel T este ideal bilateral. Atunci, sau $W \setminus T$ este un subsemigrup în care caz sîntem în situația 3b) sau putem găsi $w_1, w_2 \in W \setminus T$, astfel ca $w_1w_2 \in T$.

În acest caz $T' = w_1W \cup T$ este un ideal propriu la dreapta, deoarece $|T'| \leqslant |w_1(W \setminus T \setminus \{w_2\})| + |T| \leqslant |W| - 1$ și astfel $T' = T$. Astfel $w_1W \subset T$ și deci $\{w_1\} \cup T$ este un ideal la dreapta, deci $\{w_1\} \cup T = W$ și astfel $\{w_1\} = W \setminus T$. Atunci sau W este un semigrup ciclic și ne aflăm în cazul 1), sau putem considera V ca semigrupul ciclic generat de w_1 și atunci ne aflăm în cazul 3b). ■

PARTEA a II-a

TEORIA AUTOMATELOR

§ II.0. INTRODUCERE

Această parte conține probleme clasice de teoria automatelor.

Noțiunea de automat intră în sfera mai largă a noțiunii de sistem cibernetic, care este un model al dispozitivelor de prelucrare a informației provenind din cele mai diverse surse și care funcționează la intervale de timp bine determinate.

Ne putem imagina un automat ca o cutie neagră prevăzută cu o bornă de intrare și o bornă de ieșire și capabilă să posede un anumit număr de stări interne. Aplicînd un semnal la borna de intrare sistemul respectiv elaborează un răspuns și trece într-o nouă stare internă, aceste elemente depinzînd și de starea la momentul actual al automatului.

Deoarece introducerea semnalelor de intrare schimbarea stărilor și apariția semnalelor de ieșire, se fac la intervale determinate de timp numite tacte este natural să numim discret modul de funcționare al unui automat.

Dacă starea automatului în tactul următor și ieșirea acestuia sînt cunoscute exact, obținem automate deterministe, iar dacă starea și ieșirea sînt cunoscute pînă la anumite mulțimi de stări respectiv de ieșiri obținem automate nedeterministe.

Cele două tipuri de automate au fost studiate împreună scoțîndu-se în evidență proprietățile specifice ale automatelor deterministe, precum și raportul acestor tipuri din punct de vedere lingvistic.

§ II.1. NOȚIUNEA DE AUTOMAT

Definiția II.1.1. Un *automat* este un 5-uplu $A = [I, S, O, f, g]$ unde I, S, O sînt mulțimi nevide numite respectiv *alfabet de intrare, mulțime de stări* și *alfabet de ieșire*, $f : S \times I \to \mathcal{P}^*(S)$, $g : S \times I \to \mathcal{P}^*(O)$ sînt *funcțiile de trecere* sau *de tranziție* și de *ieșire* sau *de răspuns* ale automatului.

Dacă $\forall s \in S$, $i \in I$, $|f(s, i)| = 1$ și $|g(s, i)| = 1$, automatul A se numește *automat determinist*. În caz contrar A se numește *automat nedeterminist*.

Dacă $\forall s \in S$, $\forall i \in I$, $|f(s, i)| = 1$ automatul A se numește S-determinist, iar dacă $|g(s, i)| = 1$ automatul A este O-determinist. Un automat determinist este S-determinist și O-determinist.

Observația II.1.1. În toate cele ce urmează considerațiile referitoare la noțiunea de *automat* sînt valabile atît pentru automatele deterministe cît și pentru cele nedeterministe. Proprietățile specifice unuia din tipurile de mai sus vor fi precizate ca atare.

Fie $X = \{I, S, O\}$ și $Y \in \mathcal{P}(X)$.

Definiția II.1.2. Un *automat* A este *Y-finit* dacă mulțimile ce aparțin lui Y sînt finite. Dacă $Y = \{I, S, O\}$ automatul A, Y-finit se numește pe scurt *automat finit*.

Definiția II.1.3. Un *automat autonom* sau orologiu este un automat I-finit cu $|I| = 1$.

În acest caz alfabetul de intrare conținînd un singur simbol, intrarea automatului va fi permanent aceeași, ceea ce dă automatului o comportare independentă de exterior.

Definiția II.1.4. Un șir de stări ale automatului A, $\{s_0, s_1, ..., s_n, ...,\}$ se numește *evoluție* a automatului, iar starea s_0 se numește *starea inițială a evoluției*. O *evoluție admisibilă* este o evoluție cu proprietatea:

$$\forall n \in N, \quad \exists i \in I, \quad s_{n+1} \in f(s_n, i).$$

Uneori se impune pentru evoluțiile admisibile ale automatului ca starea inițială să aparțină unei mulțimi de stări $S_1 \subseteq S$.

Definiția II.1.5. Dacă $S_1 \subseteq S$, $|S_1| \geqslant 1$ atunci A se numește *automat slab inițial*. În cazurile extreme: $|S_1| = 1$ și $S_1 = S$, A este un *automat inițial*, respectiv *automat neinițial*, iar dacă $|S_1| \subsetneq S$, $|S_1| > 1$ automatul este *strict slab inițial*.

Pentru automatele slab inițiale se utilizează notația:

$$A = [I, S, O, f, g; S_1].$$

Definiția II.1.6. Automatul $A' = [I', S', O', f', g']$ este un *subautomat* al automatului $A = [I, S, O, f, g]$ dacă $I' \subseteq I$, $S' \subseteq S$, $O' \subseteq O$, iar $f' = f|_{S' \times I'}$, $g' = g|_{S' \times I'}$.

Fie $A = [I, S, O, f, g]$ un automat dat. Pentru anumite aplicații este utilă construcția macroautomatului și semiautomatului atașate automatului A.

Definiția II.1.7. *Macroautomatul* $M(A)$ *atașat automatului* A este automatul $M(A) = [I, \mathcal{P}^*(S), \mathcal{P}^*(O) F, G]$ unde:

$$F(S_1, i) = \bigcup_{s \in S_1} f(s, i),$$

$$G(S_1, i) = \bigcup_{s \in S_1} g(s, i),$$

pentru orice $S_1 \in \mathcal{P}^*(S)$.

Observația II.1.2. Macroautomatul $M(A)$ este totdeauna un automat determinist.

Definiția II.1.8. Un *semiautomat* este un triplet $A = [I, S, f]$ în care I, S, f au semnificațiile din definiția II.1.1.

Observația II.1.3. Pentru semiautomate noțiunile de semiautomat inițial și subsemiautomat se introduc analog noțiunile de la automate.

Definiția II.1.9. *Semiautomatul atașat automatului* $A = [I, S, O, f, g]$ este semiautomatul $S(A) = [I, S, f]$.

Observația II.1.4. Prin considerarea semiautomatului $S(A)$ se face abstracție de comportarea la ieșire a automatului A, rămînînd esențială funcționarea internă a automatului.

Remarcăm că unui automat i se poate atașa în mod unic un semiautomat, iar un semiautomat poate fi extins la un automat prin alegerea unui alfabet de ieșire O și a unei funcții g. Automatul atașat astfel nu este unic, depinzînd de această alegere.

Fie θ o relație de echivalență pe mulțimea de stări a automatului $A = [I, S, O, f, g]$, $\theta \subseteq S \times S$. θ este o *relație de congruență* în automatul A dacă:

$$\forall p \in I^*, \quad (s_1, s_2) \in \theta \rightarrow (s_1', s_2') \in \theta,$$

(II.1.1.)

$$\forall s_1' \in f(s_1, p), \quad \forall s_2' \in f(s_2, p).$$

Definiția II.1.10. *Automatul cît* al automatului A față de relația de congruență θ este automatul $A|\theta = [I, S/\theta, O, f_\theta, g_\theta]$ unde S/θ este mulțimea claselor de echivalență după relația θ, $S/\theta = \{[s] \mid s \in S\}$,

$$f_\theta([s], i) = \{[s'] \mid \exists s' \in [s'], \exists s \in [s], s' \in f(s, i)\},$$

iar

$$g_\theta([s], i) = \{o \mid \exists s \in [s], o \in g(s, i)\}.$$

§ II.2 EXTINDEREA FUNCȚIILOR DE TRECERE ȘI DE IEȘIRE

Introducerea la intrarea automatului $A = [I, S, O, f, g]$ a simbolului i_j în tactul j, $j = j_1, j_1 + 1, \ldots, j_2$, revine în fond la introducerea cuvîntului $i_{j_1} \ldots i_{j_2} \in I^*$ în tactele $j_1, \ldots, j_2$. Sîntem astfel conduși la necesitatea de a extinde funcțiile de trecere și de ieșire de la $S \times I$ la $S \times I^*$.

Pentru $\forall s \in S$, $\forall i \in I$, $\forall p \in I^*$, definim această extindere recursiv prin

(II.2.1) $$f(s, e) = s$$

(II.2.2) $$f(s, pi) = f(f(s, p), i)$$

(II.2.3) $$g(s, pi) = g(f(s, p), i)^*.$$

Observația II.2.1. Se constată imediat că pentru $p = e$, din (II.2.2) și (II.2.3) obținem

(II.2.4) $$f(s, ei) = f(f(s, e), i) = f(s, i),$$

$$g(s, ei) = g(f(s, e), i) = g(s, i),$$

deci funcțiile extinse coincid cu funcțiile automatului pe mulțimea $S \times I$.

Remarcăm că $f(s, p)$ reprezintă o mulțime de stări care conține starea în care va trece automatul în tactul $l(p) + 1$, atunci cînd automatul se găsea în starea s și s-a introdus cuvîntul p, iar $g(s, p)$ în aceleași condiții ca mai sus, este o mulțime de simboli de ieșire care conține simbolul pe care îl emite automatul în tactul $l(p)$.

Dacă $s_1 \in f(s, p)$ se spune că s_1 este un *succesor* al lui s, iar dacă $s_1 \in f(s, i)$, s_1 este un *succesor imediat*. Se mai spune că s este un *predecesor*, respectiv *predecesor imediat* al stării s_1.

Relativ la funcțiile f și g are loc

Teorema II.2.1. *Fie* $A = [I, S, O, f, g]$. *Pentru orice* $s \in S$, $i \in I$, $p, r \in I^*$, *avem*

(II.2.5) $$f(s, ip) = f(f(s, i), p),$$

(II.2.6) $$f(s, pr) = f(f(s, p), r),$$

(II.2.7) $$g(s, ip) = g(f(s, i), p),$$

(II.2.8) $$g(s, pr) = g(f(s, p), r).$$

---

* În lucrările legate în special de limbajele reprezentate în automate, extinderea funcției de ieșire se face prin

$$g(s, pi) = g(s, p)\, g(f(s, p), i)$$

deci $g(s, p)$ reprezintă o submulțime din $O^{l(p)}$ care conține cuvîntul pe care automatul îl emite tact de tact în timpul în care se introduce cuvîntul p.

Pentru noțiunile prezentate în această carte este mai convenabilă extinderea din formula (II.2.3).

Demonstrație. Vom demonstra formula (II.2.6) prin inducție asupra lungimii cuvîntului r, demonstrarea celorlalte relații făcîndu-se analog (exercițiu!).

Pentru $l(r) = 0$, $r = e$, formula (II.2.6) este valabilă ținînd seama de formula (II.2.1).

Să presupunem formula adevărată pentru $l(r) = n$ și să o demonstrăm pentru $q = ri$, $l(q) = n + 1$.

Conform formulei (II.2.2) și ipotezei inductive, se obține

$$f(s, pq) = f(s, pri) = f(f(s, pr), i) = f(f(f(s, p), r), i) =$$

$$= f(f(s, p), ri) = f(f(s, p), q). \blacksquare$$

Observația II.2.2. În legătură cu funcțiile f și g introducem următoarele funcții: $f_s : I^* \to \mathcal{P}^*(S)$, $f_p : S \to \mathcal{P}^*(S)$, $g_s : I^* \to \mathcal{P}^*(O)$, $g_p : S \to \mathcal{P}^*(O)$ definite respectiv prin

$$f_s(p) = f_p(s) = f(s, p), \tag{II.2.9}$$

$$g_s(p) = g_p(s) = g(s, p), \tag{II.2.10}$$

pe care le vom folosi ulterior.

Vom mai utiliza notația

$$f(S_1, p) = \bigcup_{s_1 \in S_1} f(s_1, p), \quad g(S_1, p) = \bigcup_{s_1 \in S_1} g(s_1, p).$$

§ II. 3. MODELE DE AUTOMATE

Descrierea noțiunii de automat se poate face în mai multe moduri pe care le vom numi *modele de automate.*

Unul dintre aceste modele este acel descris în definiția II.1.1. Acest model a fost elaborat de Mealy în anul 1955, [1], pentru cazul automatelor finite.

Vom numi modelul de automat din definiția II.1.1 *automat Mealy.*

Un model cu numeroase aplicații este modelul Moore, elaborat în anul 1956, [1]. Acest model este descris prin:

Definiția II.3.1. Un *automat Moore* este un 5-uplu $A = [I, S, O, f, h]$ unde I, S, O, f au semnificațiile din definiția II.1.1 iar $h : S \to \mathcal{P}^*(O)$ este funcția de ieșire.

În cadrul modelului Moore, legate de comportarea funcției h, se disting următoarele variante:

1. *Automate Moore imediate* pentru care

$$o_t \in h(s_{t+1}),$$

2. *Automate Moore cu întîrziere* pentru care

$$o_t \in h(s_t),$$

unde s-a notat prin s_t și o_t starea, respectiv ieșirea automatului în tactul t.

Observația II.3.1. În cazul automatelor Moore imediate ieșirea automatului la tactul t depinde de starea s_{t+1}, în care trece automatul în tactul următor, în timp ce la automatele Moore cu întîrziere efectul stării s_{t+1} din tactul $t+1$, apare în tactul $t+1$ deci un tact mai tîrziu decît în cazul precedent, ceea ce justifică denumirile utilizate.

O altă variantă a modelului Mealy utilizată în special în cazul I-finit este descrisă în:

Definiția II.3.2. Un automat Mealy I-finit, $(|I| = n)$, este un $2n+$ $+3$-uplu $A=[I, S, O, f_{i_1}, ..., f_{i_n}, g_{i_1} ..., g_{i_n}]$, unde $I=\{i_1, ..., i_n\}$ S și O au semnificațiile cunoscute, iar $f_{i_j} : S \to \mathcal{P}^*(S)$, $g_{i_j} : S \to \mathcal{P}^*(O)$. Funcțiile f_{i_j} și g_{i_j} dau mulțimile de stări, respectiv mulțimile de simboluri de ieșire la care aparțin starea și respectiv ieșirea automatului, atunci cînd se introduce la intrarea automatului simbolul i_j.

Observația II.3.2. Funcțiile f_{i_j} și g_{i_j} se obțin din funcțiile introduse în definiția II.1.1 punînd

$$f_{i_j}(s) = f(s, i_j),$$

$$g_{i_j}(s) = g(s, i_j).$$

Pentru unele aplicații interesează exclusiv comportarea internă a automatului. Printr-un proces analog degajării noțiunii de semiautomat se introduce noțiunea de semiautomat Medvedeev.

Definiția II.3.3. Un *semiautomat Medvedeev* I-finit $(|I| = n)$, este un $n+2$-uplu $A = [I, S, f_{i_1}, ..., f_{i_n}]$, unde I, S, $\{f_{i_j}\}_{j=\overline{1,n}}$ au semnificațiile din definiția II.3.2.

Modelele Mealy și Moore pot fi prezentate unitar în modelul Starke.

Definiția II.3.4. Un *automat Starke* este un 4-uplu $A = [I, S, O, k]$, unde pentru I, S, O s-au păstrat notațiile precedente, iar $k : S \times I \to \mathcal{P}^*(O \times S)$.

Funcția k dă mulțimea căreia îi aparține ieșirea la momentul t și starea la momentul $t+1$, în funcție de starea și intrarea automatului la momentul t.

Observația II.3.3. Automatele Mealy și Moore, în cazul determinist pot fi descrise ca automate Starke, punînd:

$$k(s_t, i_t) = (f(s_t, i_t), \quad g(s_t, i_t)),$$

pentru automatul Mealy și respectiv

$$k(s_t, i_t) = (f(s_t, i_t), h(s_{t+1})),$$

$$k(s_t, i_t) = (f(s_t, i_t), h(s_t)),$$

pentru automatele Moore imediate și cu întîrziere.

Reciproc, modelul Starke permite obținerea modelului Mealy, luînd

$$f(s_t, i_t) = pr_1 k(s_t, i_t),$$

$$g(s_t, i_t) = pr_2 k(s_t, i_t).$$

Dacă $pr_2 k(s_t, i_t) = h(s_{t+1})$ se obține modelul Moore imediat, iar pentru $pr_2 k(s_t, i_t) = h(s_t)$, modelul Moore cu întîrziere.

§ II.4. REPREZENTAREA AUTOMATELOR PRIN GRAFURI

Unui automat i se poate asocia în mod unic un graf, ceea ce permite utilizarea rezultatelor și tehnicilor din teoria grafurilor în teoria automatelor.

Definiția II.4.1. *Graful asociat automatului* $A = [I, S, O, f, g]$ este tripletul $\mathfrak{G}(A) = \{S, \Gamma, \mu^A\}$, unde S este mulțimea vîrfurilor care coincide cu mulțimea stărilor automatului, $s_{j_2} \in \Gamma s_{j_1}$, dacă și numai dacă există $i \in I$ astfel ca $s_{j_2} \in f(s_{j_1}, i)$ iar $\mu^A : \{(s_{j_1}, s_{j_2}), s_{j_2} \in \Gamma s_{j_1}\} \to I \times O$ astfel ca $\mu^A((s_{j_1}, s_{j_2})) = (i, o)$ dacă $s_{j_2} \in f(s_{j_1}, i)$ și $o \in g(s_{j_1}, i)$.

Graful atașat unui automat este un graf orientat și marcat.

În mod analog se introduce graful unui semiautomat.

Observația II.4.1. Automatul A este S-determinist dacă și numai dacă din $\mathrm{pr}_1 \mu^A(s_1, s_2) = \mathrm{pr}_1 \mu^A(s_1, s_3)$ rezultă $s_2 = s_3$, iar dacă din $\mathrm{pr}_1 \mu^A(s_1, s_2) = \mathrm{pr}_1 \mu^A(s_1, s_3)$ rezultă $\mathrm{pr}_2 \mu^A(s_1, s_2) = \mathrm{pr}_2 \mu^A(s_1, s_3)$ automatul este O-determinist și reciproc.

Automatul este determinist atunci și numai atunci cînd egalitatea $\mathrm{pr}_1 \mu^A(s_1, s_2) = \mathrm{pr}_1 \mu^A(s_1, s_3)$ antrenează $s_2 = s_3$ și $\mathrm{pr}_2 \mu^A(s_1, s_2) = \mathrm{pr}_2 \mu^A(s_1, s_3)$.

În exemplele care urmează vom construi graful atașat unui automat nedeterminist, determinist și unui semiautomat.

Exemplul II.4.1. Fie automatul $A = [\{i_1, i_2\}, \{s_1, s_2\}, \{o_1, o_2\} f, g]$ unde f și g sînt date prin următoarele tabele

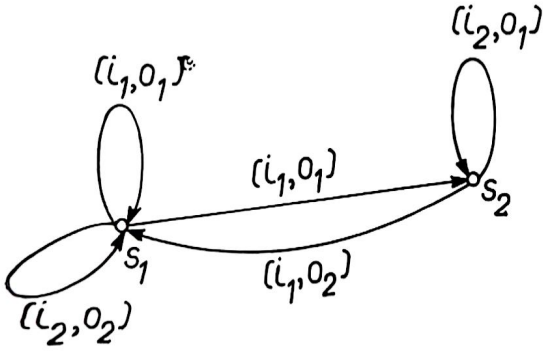


Fig. II. 4.1

f	s_1	s_2
i_1	$\{s_1, s_2\}$	$\{s_1\}$
i_2	$\{s_1\}$	$\{s_2\}$

g	s_1	s_2
i_1	$\{o_1\}$	$\{o_2\}$
i_2	$\{o_2\}$	$\{o_1\}$

Graful corespunzător este reprezentat în fig. II.4.1.

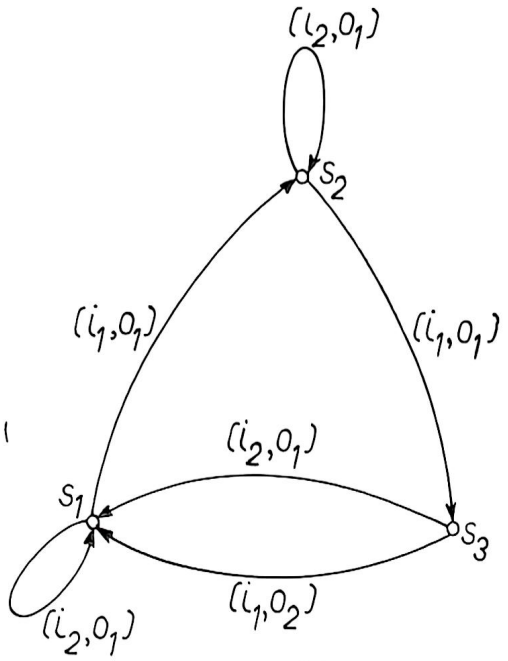


Fig. II. 4.2

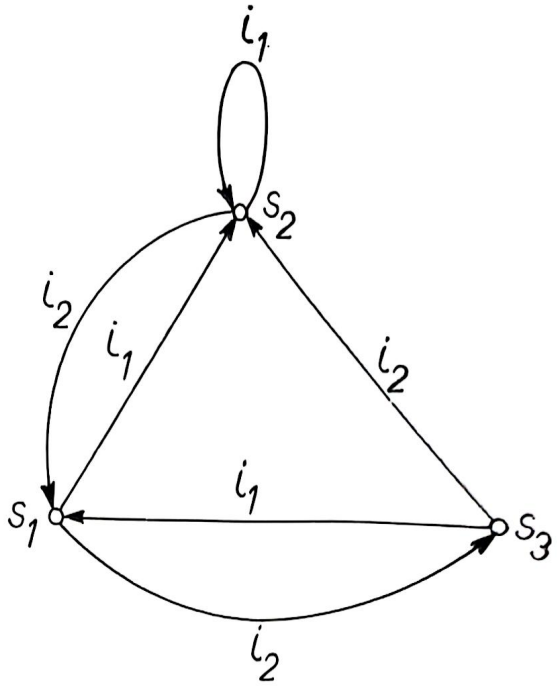


Fig. II. 4.3

Exemplul II.4.2. Fie automatul $A = [\{i_1, i_2\}, \{s_1, s_2, s_3\}, \{o_1, o_2\}, f, g]$ unde f și g sînt date prin tabelele

f	s_1	s_2	s_3
i_1	s_2	s_3	s_1
i_2	s_1	s_2	s_1

g	s_1	s_2	s_3
i_1	o_1	o_1	o_2
i_2	o_1	o_1	o_1

Graful corespunzător este reprezentat în fig. II.4.2.

Deoarece funcția μ^A satisface condiția din observația II.4.1. automatul considerat este determinist, cum se poate constata și direct din tabelele care reprezintă funcțiile f și g.

Exemplul II.4.3. Fie semiautomatul $A = [\{i_1, i_2\}, \{s_1, s_2, s_3\}, f]$ unde funcția f este dată prin tabelul

f	s_1	s_2	s_3
i_1	s_2	s_2	s_1
i_2	s_3	s_1	s_2

Graful corespunzător este reprezentat în fig. II.4.3. Se constată imediat că acest semiautomat este determinist.

Proprietățile de conexiune ale automatelor pot fi studiate eficient cu ajutorul grafurilor atașate.

Pentru a ilustra acest fapt vom introduce mai întîi unele noțiuni.

Definiția II.4.2. O stare $s \in S$ este *stare accesibilă din starea* s_0, dacă există $p \in I^*$ astfel ca $s \in f(s_0, p)$. Se mai spune că starea s este accesibilă prin cuvîntul p din starea s_0.

Starea s este *k-accesibilă* din starea s_0 dacă $\exists p$, $l(p) \leqslant k$ astfel ca $s \in f(s_0, p)$ și este *strict k-accesibilă* din starea s_0 dacă este k-accesibilă, dar nu este $(k-1)$-accesibilă.

Observația II.4.2. Dacă într-un automat există o stare strict $(k+1)$-accesibilă atunci există și o stare strict k-accesibilă, $\forall k \in N$.

Într-adevăr fie s o stare strict $(k+1)$-accesibilă din starea s_0. Aceasta înseamnă că $\exists p \in I^*$, $l(p) = k+1$, $s \in f(s_0, p)$.

Fie $p = q \cdot i$, $l(q) = k$. Atunci $\forall s' \in f(s_0, q)$ este strict k-accesibil.

Definiția II.4.3. *Subautomatul conex atașat stării* s_0 este automatul $A(s_0) = [I, S(s_0), O, f', g']$ unde $S(s_0) = \{s | \exists p, s \in f(s_0, p)\}$, iar $f' = f|_{S(s_0) \times I}$, $g' = g|_{S(s_0) \times I}$.

Definiția II.4.4. *Automatul A este conex de stare* s_0 dacă $A(s_0) = A$. *Automatul A* este *tare conex* dacă $A = A(s_0)$, $\forall s_0 \in S$.

Observația II.4.3. Subautomatul conex atașat stării s_0 corespunde componentei conexe care conține vîrful s_0, din graful $\mathfrak{G}(A)$. Automatul A este tare conex dacă și numai dacă graful atașat este tare conex. Mai mult, starea s este accesibilă prin cuvîntul p din starea s_0 dacă și numai dacă există în graful $\mathfrak{G}(A)$ un drum între s_0 și s de lungime $l(p)$, iar simbolii de intrare care marchează arcele drumului sînt simbolii care formează, în aceeași ordine, cuvîntul p.

În baza acestei observații conexiunea și starea conexiune a unui automat pot fi studiate cu algoritmii descriși în [Ivănescu, P.; Rudeanu, S. [1]].

Observația II.4.4. Considerațiile de mai sus sînt valabile și pentru semiautomate, cu modificările care se impun.

În baza observației II.4.3. putem formula

Teorema II.4.1. *Dacă starea s este accesibilă din starea s_0 și $|S| = n$, există un cuvînt $p \in I^*$ cu $l(p) < n$ astfel ca $s \in f(s_0, p)$.*

Demonstrație. Starea s fiind accesibilă din starea s_0 există în graful $\mathfrak{G}(A)$ cel puțin un drum de la vîrful s_0 la vîrful s. Fie m lungimea unui drum între s_0 și s. Dacă $m < n$, teorema se verifică. Fie deci $m \geqslant n$. Atunci drumul conține cel puțin un circuit, deoarece există cel puțin un vîrf prin care drumul trece

de cel puțin două ori. Îndepărtînd acest circuit obținem un drum între s_0 și s și fie m_1 lungimea noului drum. Evident $m_1 < m$. Dacă $m_1 < n$ teorema se verifică, în caz contrar se repetă procedeul. După un număr finit de repetări ale procedeului descris mai sus, ajungem la un drum între s_0 și s de lungime $m' < n$, deoarece în fiecare pas lungimea drumului scade și m era finit.

Cuvîntul p alcătuit din simbolii de intrare care marchează arcele drumului obținut are lungimea $l(p) = m' < n$ și $s \in f(s_0, p)$. ■

Consecința II.4.1. Dacă automatul A este tare conex și S-finit atunci pentru $\forall s_0$, $s \in S$, există $p \in I^*$ cu $l(p) < |S|$ și $s \in f(s_0, p)$.

Metodele teoriei grafurilor sugerează considerarea pentru automate deterministe a unor proprietăți speciale de conexiune și anume:

Definiția II.4.5. Automatul determinist $A = [I, S, O, f, g]$ are proprietatea de:

1. *semi-restabilire*, dacă pentru orice simbol $i \in I$ și orice $s \in f(S, i)$ există un $p \in I^*$ astfel ca $s = f(s, pi)$, cu alte cuvinte starea s la care se poate ajunge cu simbolul de intrare i, este accesibilă prin i, de la cel puțin un succesor al lui s.

2. *restabilire*, dacă pentru orice simbol $i \in I$ și orice $s \in S$, există un cuvînt $p \in I^*$, astfel ca $s = f(s, ip)$, adică orice stare este accesibilă de la oricare din succesorii ei imediați.

3. *predecesor unic*, cînd pentru orice simbol $i \in I$ și pentru orice stări $s_1, s_2 \in S$ din $f(s_1, i) = f(s_2, i)$ urmează $s_1 = s_2$, adică aplicațiile $\{f_i\}_{i \in I}$ (vezi observația II.2.2) sînt injective.

4. *surjecție*, dacă pentru orice $i \in I$, $f(S, i) = S$, adică aplicațiile $\{f_i\}_{i \in I}$ sînt surjective.

5. *reversibilitate parțială*, dacă pentru orice simbol $i \in I$ și orice stare $s_1 \in S$, există un $p \in I^*$ astfel ca pentru orice $s_2 \in S$ egalitatea $f(s_2, i) = s_1$ să implice $f(s_1, p) = s_2$.

6. *reversibilitate potențială*, dacă pentru orice $i \in I$ există o aplicație $\alpha : S \to S$ astfel ca pentru orice $s \in S$, $\alpha(f(s, i)) = f(\alpha(s), i) = s$.

7. *reversibilitate*, dacă pentru orice $i \in I$ există $p \in I^*$, astfel ca pentru orice $s \in S$ să avem $f(s, ip) = s$, adică fiecare aplicație f_i este inversabilă și inversa ei este o funcție f_p, cu $p \in I^*$.

Definiția precedentă pe care o completăm cu proprietatea de tare conexiune (vezi definiția II.4.4) poate fi sintetizată în tabelul II.4.1 (Bavel și Muller [2]).

Tabelul II.4.1.

Notația pentru proprietate	*Numele proprietății*	*Conținutul proprietății*
P_1	Semi-restabilire	$\forall i \in I,\ \forall s \in f(S, i),\ \exists p \in I^*,\ f(s, pi) = s$
P_2	Restabilire	$\forall i \in I,\ \forall s \in S,\ \exists p \in I^*,\ f(s, ip) = s$
P_3	Predecesor unic	$\forall i \in I,\ \forall s_1, s_2 \in S,\ [f(s_1, i) = f(s_2, i) \to s_1 = s_2]$
P_4	Surjecție	$\forall i \in I,\ f(S, i) = S.$
P_5	Reversibilitate parțială	$\forall i \in I,\ \forall s_1 \in S,\ \exists p \in I^*,\ \forall s_2 \in S,$ $[f(s_1, i) = s_2 \to f(s_2, p) = s_1].$
P_6	Reversibilitate potențială	$\forall i \in I,\ \exists \alpha : S \to S,\ \forall s \in S\ \ \alpha[(f(s, i)] = f[\alpha(s), i] = s$
P_7	Reversibilitate	$\forall i \in I,\ \exists p \in I^*,\ \forall s \in S,\ f(s, ip) = s$
P_8	Tare conexiune	$\forall s_1, s_2 \in S,\ \exists p \in I^*,\ f(s_1, p) = s_2.$

Observația II.4.5. În cazul reversibilității potențiale inversa funcției f_i nu este o funcție de forma f_p cu $p \in I^*$, ci este funcția $\alpha : S \to S$.

Pentru automatele reversibile parțial orice stare s_2 care este un predecesor imediat pentru starea $s_1 (s_1 = f(s_2, i))$ este accesibilă prin p din starea s_1, unde p este un cuvînt din I^*.

Proprietatea de unic predecesor se extinde în mod natural cerînd ca pentru $\forall p \in I^*$ și $s_1, s_2 \in S$, $f(s_1, p) = f(s_2, p)$ să atragă $s_1 = s_2$.

Teorema II.4.2 (*Bavel și Muller* [2]). *Între proprietățile* $P_1, \ldots, P_8$ *au loc implicațiile din următoarea schemă:*

$$\begin{array}{ccccc} & & P_8 & \to P_2 & \to P_1 \\ & & \nearrow & & \\ & & P_5 & \to P_3 & \\ & \nearrow & & \nearrow & \\ P_7 & \to P_6 & \to P_4 & & \end{array}$$

Demonstrație. $(P_8 \to P_2)$ Fie $i \in I$, $s \in S$. Atunci P_8 implică existența unui cuvînt p cu $f(f(s, i), p) = f(s, ip) = s$.

$(P_2 \to P_1)$ Fie $i \in I$ și $s_1 \in f(S, i)$ adică există $s_2 \in S$ cu $f(s_2, i) = s_1$. Dar P_2 antrenează existența unui cuvînt $p \in I^*$ cu $f(s_2, ip) = s_2$, prin urmare $f(s_1, pi) = f(f(s_2, i), pi) = f(s_2, ipi) = f(f(s_2, ip), i) = f(s_2, i) = s_1$.

$(P_5 \to P_2)$ Rezultă imediat din definiție.

$(P_5 \to P_3)$ Fie $s_1, s_2 \in S$, $i \in I$ și să presupunem că $f(s_1, i) = f(s_2, i) = s_3$. Atunci P_5 implică existența unui cuvînt $p \in I^*$ pentru care au loc egalitățile $f(s_3, p) = s_1$ și $f(s_3, p) = s_2$, deci $s_1 = s_2$.

$(P_7 \to P_5)$. Rezultă imediat din definiție.

$(P_7 \to P_6)$ Fie $i \in I$. Atunci P_7 implică existența cuvîntului $p \in I^*$ astfel ca pentru $\forall s \in S$, $f(s, ip) = s$. Să arătăm că aplicația $\alpha : S \to S$ dată prin $\alpha(s) = f(s, p)$ satisface condiția

$$\alpha[f(s, i)] = f[\alpha(s), i] = s, \quad \forall s \in S,$$

adică

$$f(f(s, i), p) = f(f(s, p), i) = s, \quad \forall s \in S,$$

sau

$$f(s, ip) = f(s, pi) = s, \quad \forall s \in S.$$

Cum $f(s, ip) = s$, rămîne de arătat că $f(s, pi) = s$, $\forall s \in S$. Dar $f(f(s, p), ip) = f(s, p)$ sau $f(f(s, pi), p) = f(s, p)$. Deoarece $(P_7 \to P_5)$ și $(P_5 \to P_3)$, obținem $f(s, pi) = s$.

$(P_6 \to P_3)$ Fie $s_1, s_2 \in S$, $i \in I$ astfel ca $f(s_1, i) = f(s_2, i)$. Atunci P_6 asigură existența aplicației $\alpha : S \to S$ astfel ca $s_1 = \alpha[f(s_1, i)] = \alpha[f(s_2, i)] = s_2$.

$(P_6 \to P_4)$ Fie $s \in S$ și $i \in I$. Atunci P_6 asigură existența aplicației $\alpha : S \to S$ cu $f(\alpha(s), i) = s$. ■

Observația II.4.6. În afară de implicațiile de mai sus mai au loc și implicațiile

$$(P_1 \wedge P_3) \to P_5 \text{ și } (P_3 \wedge P_4) \to P_6.$$

Într-adevăr, fie $i \in I$, $s_2 \in S$ și să presupunem că pentru un $s_1 \in S$ avem $f(s_1, i) = s_2$. P_1 implică existența unui cuvînt $p \in I^*$ cu $f(s_2, pi) = s_2$, sau $f(f(s_2, p), i) = s_2$. Conform cu P_3 din $f(s_1, i) = f(f(s_2, p), i)$ urmează $s_1 = f(s_2, p)$.

Fie acum $i \in I$. În baza lui P_4 pentru orice $s_1 \in S$ există un $s_2 \in S$ cu $f(s_2, i) = s_1$, iar conform cu P_3, dacă $f(s_2, i) = s_1$ și $s_3 \neq s_2$, atunci $f(s_3, i) \neq s_1$. Fie s_2 unicul predecesor prin i al lui s_1, și să definim aplicația $\alpha : S \to S$

prin $\alpha(s_1) = \alpha(f(s_2, i)) = s_2$, pentru orice $s_1 \in S$. Aplicația α este bine definită și mai mult $f[\alpha(s_1), i] = f(s_2, i) = s_1 = \alpha[f(s_1, i)]$. ■

Față de proprietățile $P_1, \ldots, P_7$, conform cu teorema II.4.2 și observația II.4.6, clasa tuturor automatelor deterministe poate fi împărțită în 11 subclase nevide. Această împărțire este reprezentată schematic în tabelul II.4.2 unde la intersecția liniei j cu coloana P_i apare 1 sau 0, după cum automatele din subclasa reprezentată prin linia j posedă, sau nu posedă, proprietatea P_i.

Tabelul II.4.2

	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6	P_7
1	1	0	0	0	0	0	0
2	1	1	0	0	0	0	0
3	0	0	1	0	0	0	0
4	0	0	0	1	0	0	0
5	1	1	1	0	1	0	0
6	0	0	1	1	0	1	0
7	1	1	1	1	1	1	1
8	1	0	0	1	0	0	0
9	1	1	1	1	1	1	0
10	0	0	0	0	0	0	0
11	1	1	0	1	0	0	0

În continuare pentru fiecare subclasă de automate din tabelul II.4.2 prezentăm cîte un automat pe care îl vom reprezenta prin graful atașat. Pentru simplitate, avînd în vedere că în proprietățile de mai sus nu interesează comportarea exterioară a automatului vom considera semiautomate.

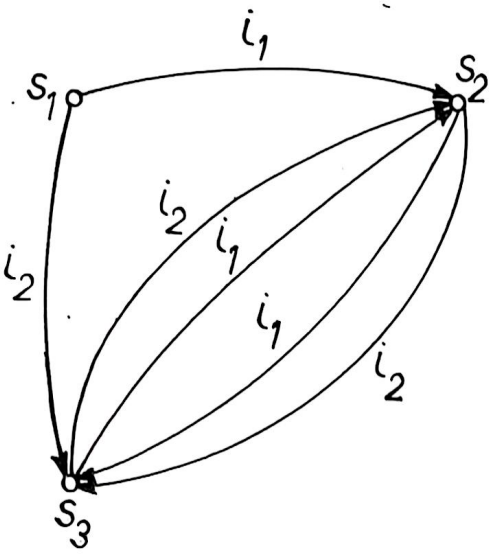


Fig. II. 4.4

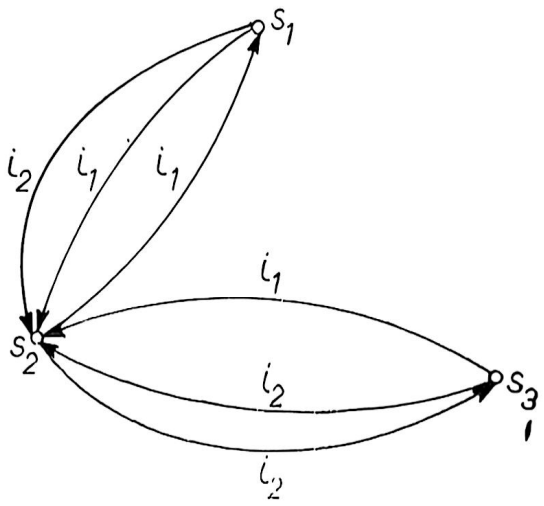


Fig. II. 4.5

Exemplul II.4.4. Fie semiautomatul $A_1 = [\{i_1, i_2\}, \{s_1, s_2, s_3\}, f_1]$ unde

f_1	s_1	s_2	s_3
i_1	s_2	s_3	s_2
i_2	s_3	s_3	s_2

Graful atașat acestui semiautomat este reprezentat în fig. II.4.4.

Se observă imediat din acest graf că acest semiautomat posedă numai proprietatea P_1.

Exemplul II.4.5. Fie semiautomatul $A_2 = [\{i_1, i_2\}, \{s_1, s_2, s_3\}, f_2]$ unde

f_2	s_1	s_2	s_3
i_1	s_2	s_1	s_2
i_2	s_2	s_3	s_2

Graful acestui semiautomat este reprezentat în fig. II.4.5. Se observă ușor că semiautomatul A_2 posedă proprietățile P_1 și P_2.

Exemplul II.4.6. Fie semiautomatul autonom $A_3 = [\{i\}, \{s_j\}_{j \in N^*}, f_3]$ unde $f_3(s_j, i) = s_{j+1}$ $\forall j \in N^*$.

Graful atașat lui A_3 este reprezentat în fig. II.4.6. Se constată că A_3 se bucură numai de proprietatea P_3.

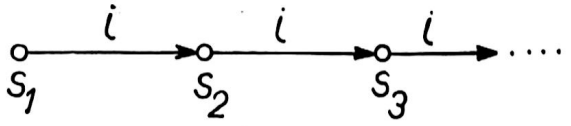


Fig. II. 4.6

Exemplul II.4.7. Fie semiautomatul autonom

$$A_4 = [\{i\}, \{s_j\}_{j\in N}, f_4] \quad \text{cu} \quad f_4(s_0, i) = s_0 \quad \text{și} \quad f_4(s_j, i) = s_{j-1},$$

pentru orice $j > 0$.

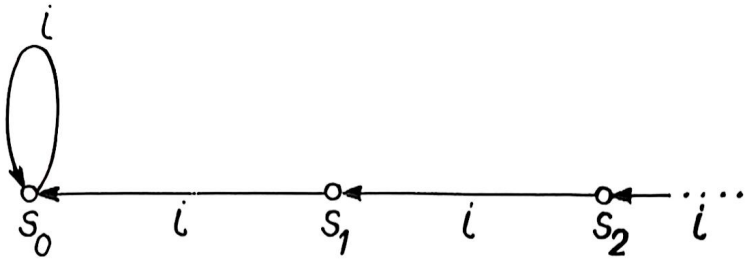


Fig. II. 4.7

Graful atașat semiautomatului A_4 este reprezentat în fig. II.4.7 și se constată imediat că A_4 posedă proprietatea P_4.

Exemplul II.4.8. Fie $A_5 = [\{i_1, i_2, i_3\}, \{s_j\}_{j\in Z}, f_5]$ cu

f_5	s_j $j\in Z$
i_1	s_{2j}
i_2	s_{j+1}
i_3	s_{j-1}

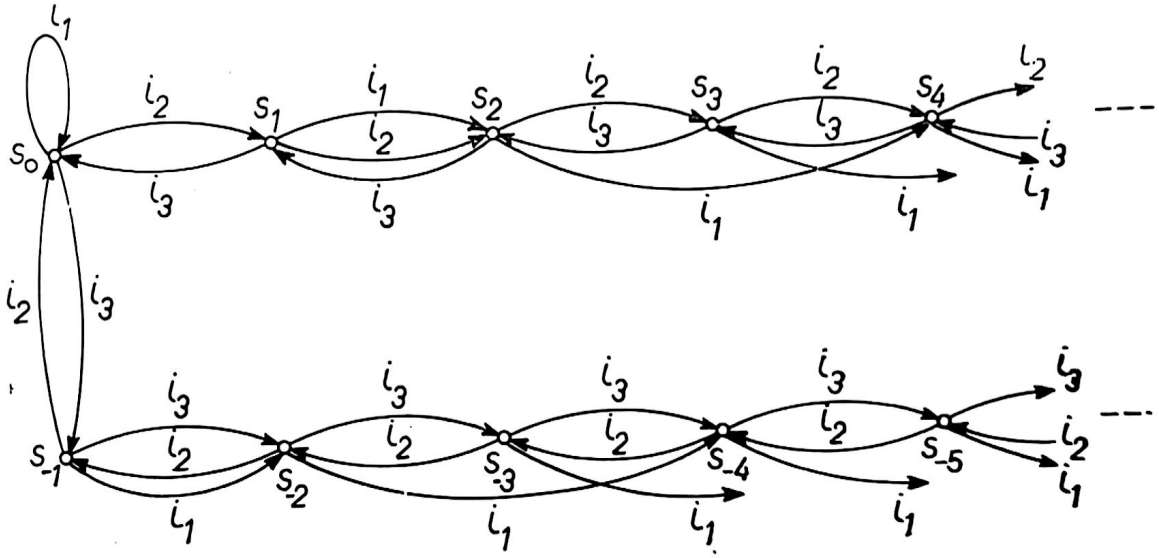


Fig. II. 4.8

Graful atașat lui A_5 este reprezentat în fig. II.4.8. Se observă că A_5 posedă proprietățile P_1, P_2, P_3 și P_5.

Exemplul II.4.9. Fie semiautomatul autonom $A_6 = [\{i\}, \{s_j\}_{j\in Z}, f_6]$ cu $f_6(s_j, i) = s_{j+1}$, $\forall j \in Z$.

Graful atașat este reprezentat în fig. II.4.9. Semiautomatul A_6 se bucură de proprietățile P_3, P_4, și P_6.

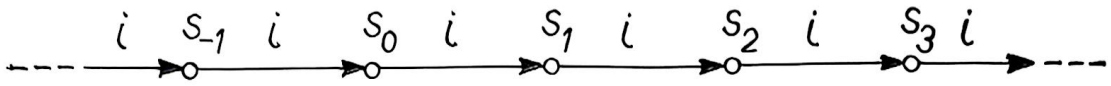


Fig. II. 4.9

Exemplul II.4.10. Fie semiautomatul $A_7 = [\{i_1, i_2\}, \{s_j\}_{j\in Z}, f_7]$ cu

f_7	s_j $\quad j\in Z$
i_1	s_{j+1}
i_2	s_{j-1}

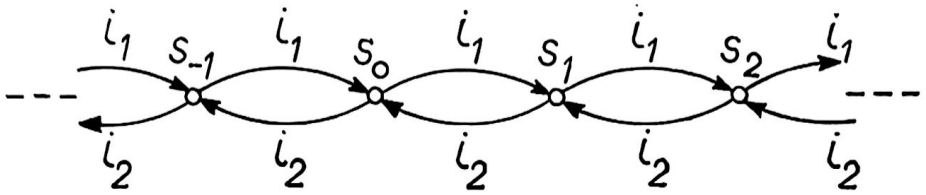


Fig. II. 4.10

Graful atașat este reprezentat în fig. II.4.10. A_7 posedă toate proprietățile $P_1, \ldots, P_7$.

Exemplul II.4.11. Fie $A_8 = [\{i_1, i_2, i_3\}, \{s_j, u_k, v_k\}_{j\in Z, k\in N^*}, f_8]$ cu

$$f_8(s_j, i_1) = \begin{cases} s_{j+1} & j \geqslant 0 \\ s_j & j < 0 \end{cases}, \qquad f_8(u_k, i_1) = \begin{cases} s_0, & k = 1 \\ u_{k-1}, & k > 1 \end{cases},$$

$$f_8(v_k, i_1) = \begin{cases} s_1, & k = 1 \\ v_{k-1}, & k > 1 \end{cases},$$

$$f_8(s_j, i_2) = \begin{cases} s_{j-1}, & j > 1 \\ s_{j+1}, & j < 0 \\ u_1, & j = 0 \\ v_1, & j = 1 \end{cases}, \quad f_8(u_k, i_2) = u_{k+1},\ k > 0, \quad f_8(v_k, i_2) = v_{k+1},\ k > 0;$$

$$f_8(s_j, i_3) = \begin{cases} s_j, & j > 0 \\ s_{j-1}, & j < 1 \end{cases}, \quad f_8(u_k, i_3) = \begin{cases} s_0, & k = 1 \\ u_{k-1}, & k > 1 \end{cases},$$

$$f_8(v_k, i_3) = v_k,\ k > 0.$$

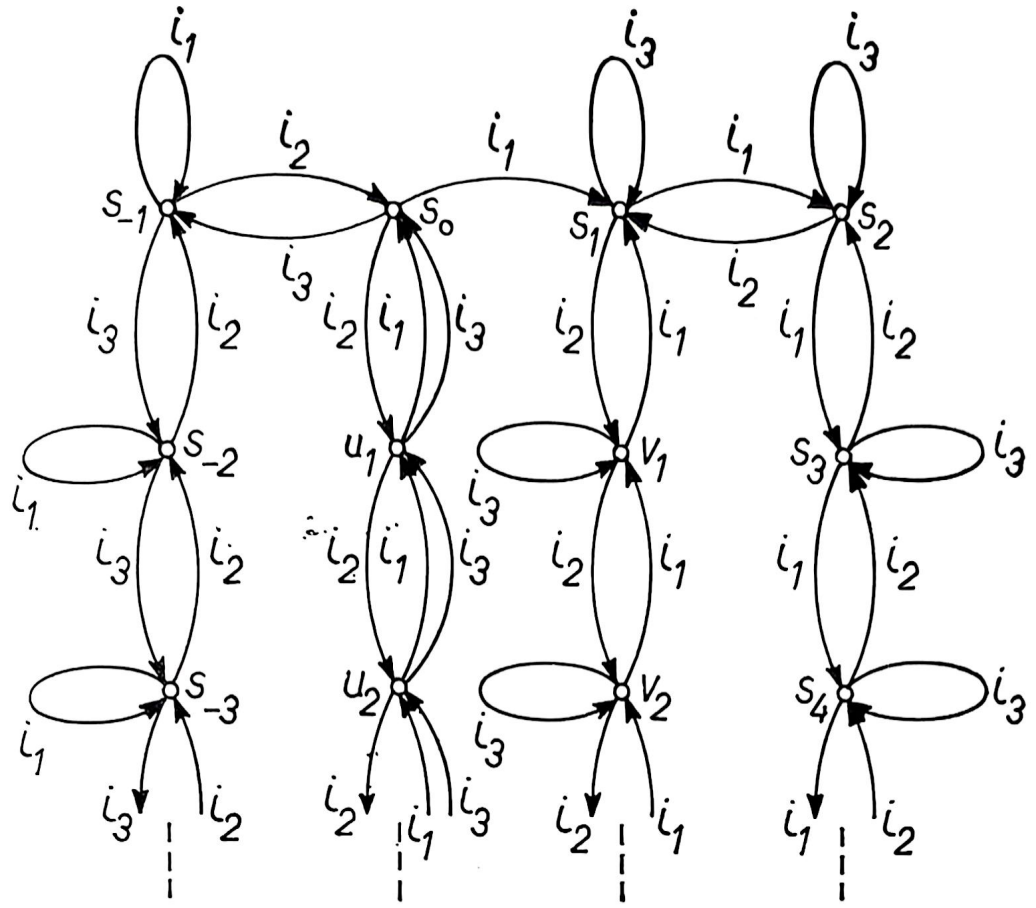


Fig. II. 4.11

Graful atașat semiautomatului A_8 este reprezentat în fig. II.4.11. A_8 posedă proprietățile P_1 și P_4. Se observă că starea s_0 nu este accesibilă de la starea s_1, iar starea s_1 are doi predecesori față de i_1.

Exemplul II.4.12. Fie semiautomatul

$$A_9 = \left[\{i, i'_j, i''_j\}_{j\in N^*}, \left\{\frac{m}{2^n}\right\}_{\substack{m\in Z\\ n\in N^*}}, f_9\right]$$

cu

$$f_9(s, i) = 2s, \quad f_9(s, i'_j) = s + \frac{1}{2^j}, \quad f_9(s, i''_j) = s - \frac{1}{2^j}, \quad j\in N^*,$$

$$\forall s\in \left\{\frac{m}{2^n}\right\}_{\substack{m\in Z\\ n\in N^*}}.$$

Vom verifica direct că A_9 posedă proprietățile $P_1, \ldots, P_6$, dar nu posedă proprietatea P_7. Avem:

$$f_9\left(\frac{m}{2^n}, i\right) = f_9\left(\frac{2^j m - 2^n}{2^{n+j}}, i'_j\right) = f_9\left(\frac{2^j m + 2^n}{2^{n+j}}, i''_j\right) = \frac{m}{2^n},$$

deci are loc P_4.

Fie $f_9(s, i) = \frac{m}{2^n}$, atunci $f_9\left(\frac{m}{2^n}, k\right) = s$, unde, prin definiție

$$k = \begin{cases} (i''_{n+1})^m, & m > 0 \\ (i'_{n+1})^{-m} & m < 0 \\ i & m = 0 \end{cases}.$$

Dacă $f_9(s, i'_j) = \frac{m}{2^n}$, atunci $f_9\left(\frac{m}{2^n}, i'_j\right) = s$ și dacă $f_9(s, i''_j) = \frac{m}{2^n}$, atunci $f_9\left(\frac{m}{2^n}, i''_j\right) = s$, deci are loc proprietatea P_5.

Prin implicațiile din teorema II.4.2 și observația II.4.6 din P_4 și P_5 se obțin proprietățile P_1, P_2, P_3 și P_6.

Se poate arăta indirect că A_9 nu posedă proprietatea P_7 și anume, fie aplicația $\alpha : S \to S$, definită astfel:

$$\alpha(s) = s - [s]^*, \quad \forall s \in S$$

și fie semiautomatul

$$A'_9 = [\{i, i'_j, i''_j\}_{j \in N^*}, S', f'_9]$$

cu

$$S' = \alpha\left(\left\{\frac{m}{2^n}\right\}_{\substack{m \in Z \\ n \in N^*}}\right)$$

iar

$$f'_9(s', i) = 2s' - [2s'].$$

$$f'_9(s', i'_j) = s' + \frac{1}{2^j} - \left[s' + \frac{1}{2^j}\right],$$

$$f'_9(s', i''_j) = s' - \frac{1}{2^j} - \left[s' - \frac{1}{2^j}\right], \quad \forall s' \in S'.$$

Se observă că A'_9 posedă proprietatea P_7 atunci și numai atunci cînd A_9 posedă proprietatea P_7. Dar $f'_9\left(\frac{1}{2}, i\right) = 1 - [1] = 0$ și $f_9(0, i) = 0 - [0] = 0$,

* $[s]$ = partea întreagă a numărului s, adică cel mai mare întreg conținut în s.

deci A'_9 nu posedă proprietatea P_3 și cum $P_7 \to P_5 \to P_3$, urmează că A'_9 nu posedă nici proprietatea P_7.

Exemplul II.4.13. Fie semiautomatul autonom $A_{10} = [\{i\}, \{s_1, s_2, s_3\}, f_{10}]$ cu

f_{10}	s_1	s_2	s_3
i	s_2	s_3	s_3

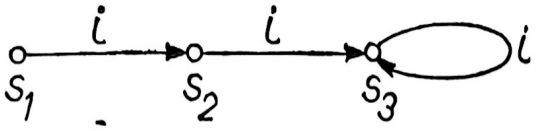


Fig. II. 4.12

Graful lui A_{10} este reprezentat în fig. II.4.12 și se constată imediat că A_{10} nu posedă nici una din proprietățile $P_1, \ldots, P_7$.

Exemplul II.4.14. Fie semiautomatul $A_{11} = [\{i_1, i_2\}, \{s_j\}_{j\in Z}, f_{11}]$ cu

$$f_{11}(s_j, i_1) = \begin{cases} s^0 & j = 0 \\ s_{-j} & j > 0, \\ s_{-j-1} & j < 0 \end{cases} \qquad f_{11}(s_j, i_2) = s_{j-1}, \ \forall j \in Z.$$

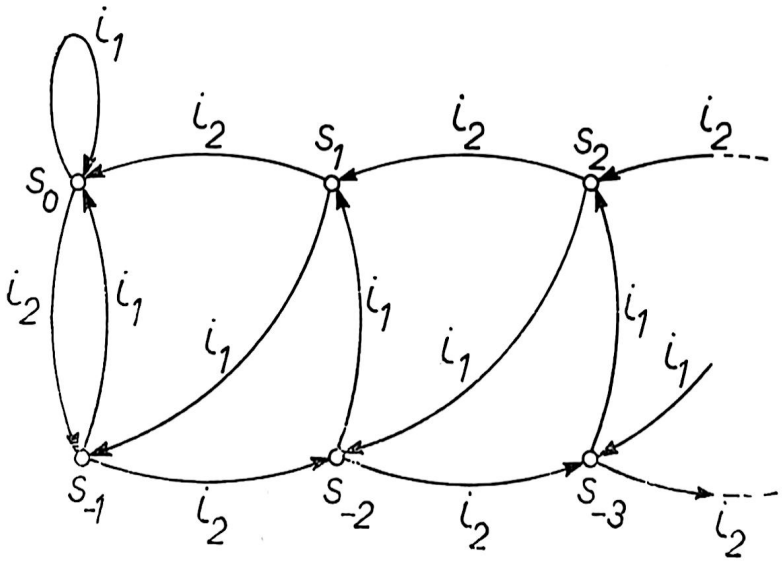


Fig. II. 4.13

În fig. II.4.13 este reprezentat graful atașat semiautomatului A_{11}. Se observă că posedă proprietățile P_1, P_2 și P_4.

Observația II.4.7. Semiautomatele din exemplele II.4.5, II.4.8, II.4.11, II.4.12 și II.4.14 sînt tari conexe, deci posedă și proprietatea P_8.

§ II. 5. RELAȚII DE ECHIVALENȚĂ PE MULȚIMI DE STĂRI

Necesitatea studierii unor relații de echivalență pe mulțimea stărilor unui automat apare în procesul de proiectare al dispozitivelor modelate de automate. Pe un alt plan, introducerea echivalenței între automate permite alegerea automatului optim (după un anumit criteriu de optimalitate) din mulțimea automatelor care realizează același proces de prelucrare a informației.

În cele ce urmează vom nota cu **Aut** (I, O) mulțimea automatelor cu alfabetul de intrare I și cu alfabetul de ieșire 0. Dacă $A \in$ **Aut** (I, O) pentru simplitate vom pune în evidență numai mulțimea de stări și funcțiile de trecere și ieșire, notînd $A = [S, f, g]$.

Definiția II.5.1. Fie $A = [S, f, g]$ și $S_1, S_2 \subseteq S$. *Mulțimile de stări* S_1 și S_2 sînt *echivalente* $(S_1, S_2) \in \rho$, dacă

$$g(S_1, p) = g(S_2, p), \quad \forall p \in I^*, \quad p \neq e, \tag{II.5.1}$$

sau

$$g_p(S_1) = g_p(S_2),$$

adică

$$\rho = \bigcap_{\substack{p \in I^* \\ p \neq e}} \ker g_p. \tag{II.5.2}$$

Stările $s_1, s_2 \in S$ sînt echivalente dacă $(\{s_1\}, \{s_2\}) \in \rho$. Vom nota acest lucru pentru simplitatea $(s_1, s_2) \in \rho$.

Observația II.5.1. Echivalența dintre mulțimile de stări S_1 și S_2 poate fi exprimată prin egalitatea $g_{s_1}(p) = g_{s_2}(p)$, pentru $\forall p \in I^*$, unde $g_{s_1} : I^* \to P^*(O)$ cu $g_{s_1}(p) = g(S_1, p)$.

Definiția II.5.2. Fie $A = [S, f, g]$, $S_1, S_2 \subseteq S$. Mulțimile S_1 și S_2 sînt n-echivalente, $(S_1, S_2) \in \rho_n$, dacă

$$g(S_1, p) = g(S_2, p) \quad \forall p \in I^*, \quad 0 < l(p) \leqslant n, \tag{II.5.3}$$

adică

$$\rho_n = \bigcap_{\substack{p \in I^* \\ 0 < l(p) \leqslant n}} \ker g_p. \tag{II.5.4}$$

Stările $s_1, s_2 \in S$ sînt n-echivalente dacă $(\{s_1\}, \{s_2\}) \in \rho_n$, ceea ce se va nota $(s_1, s_2) \in \rho_n$.

Observația II.5.2. Egalitățile (II.5.1) și (II.5.3) din definițiile de mai sus sînt egalități de submulțimi ale mulțimii O.

Cititorul poate verifica cu ușurință faptul că relațiile din definițiile II.5.1, 2 sînt veritabile relații de echivalență (reflexive, simetrice și tranzitive), ceea ce le justifică denumirea.

Teorema II.5.1. Fie $(s_1, s_2) \in \rho$. *Atunci pentru succesorii stărilor* s_1, s_2 *avem* $(f(s_1, p), f(s_2, p)) \in \rho$, $\forall p \in I^*$, *iar dacă* $(s_1, s_2) \in \rho_n$ *atunci* $(f(s_1, p), f(s_2, p)) \in \rho_{n-l(p)}$, $\forall p \in I^*$, $l(p) \leqslant n$.

Demonstrație. $(s_1, s_2) \in \rho$ înseamnă $g(s_1, p) = g(s_2, p)$, $\forall p \in I^*$. Atunci conform formulei (II.2.8) avem $g(f(s_1, p), q) = g(s_1, pq) = g(s_2, pq) = g(f(s_2, p), q)$, $\forall q \in I^*$. Dacă $(s_1, s_2) \in \rho_n$, pentru orice $p \in I^*$ cu $0 < l(p) \leqslant n$ avem $g(s_1, p) = g(s_2, p)$. Atunci, pentru orice $q \in I^*$, $l(q) \leqslant n - l(p)$, $g(f(s_1, p), q) = g(f(s_2, p), q)$, deoarece $l(pq) = l(p) + l(q) \leqslant n$. ■

*Observația II.*5.3. Pentru $m, n \in N$, $m < n$, avem:

$$\rho_m \geqslant \rho_n \geqslant \rho. \tag{II.5.5}$$

Teorema II.5.2. *Dacă* $(s_1, s_2) \in \rho_n$ *și* $(f(s_1, q), f(s_2, q)) \in \rho$ *pentru orice* $q \in I^*$, $l(q) = n$, *atunci* $(s_1, s_2) \in \rho$.

Demonstrație. Avem de arătat relația (II.5.1). Pentru $p \in I^*$ cu $l(p) \leqslant n$ relația este verificată prin ipoteza teoremei. Fie acum $p \in I^*$ cu $l(p) > n$ și $p = p_1 p_2$, $l(p_1) = n$, $l(p_2) = l(p) - n$. Atunci $g(s_1, p) = g(s_1, p_1 p_2) = g(f(s_1, p_1), p_2) = g(f(s_2, p_1), p_2) = g(s_2, p_1 p_2) = g(s_2, p)$.

Am folosit aici formula (II.2.8) și faptul că $(f(s_1, q), f(s_2, q)) \in \rho$ pentru $q \in I^*$ cu $l(q) = n$. ■

Un rezultat similar teoremei II.5.2 este inclus în:

Teorema II.5.3. *Dacă există* $m, n \in N$, $m \leqslant n$ *și* $(s_1, s_2) \in \rho_m$, $(f(s_1, q), f(s_2, q)) \in \rho_{n-m}$ *pentru orice* $q \in I^*$, $l(q) = m$ *atunci* $(s_1, s_2) \in \rho_n$.

Demonstrație. Avem de arătat că $g(s_1, p) = g(s_2, p)$ pentru $\forall p \in I^*$, $l(p) \leqslant n$. Dacă $l(p) \leqslant m$ egalitatea se verifică prin ipoteză.

Fie acum $n \geqslant l(p) > m$ și să punem $p = p_1 p_2$, $l(p_1) = m$ și $l(p_2) = n - m$. Atunci

$$g(s_1, p) = g(s_1, p_1 p_2) = g(f(s_1, p_1), p_2) = g(f(s_2, p_1), p_2) =$$

$$= g(s_2, p_1 p_2) = g(s_2, p). \blacksquare$$

Teorema II.5.4. Dacă $\exists k \in N$ și $\rho_k = \rho_{k+1}$ *atunci* $\rho_k = \rho_{k+j}$, $\forall j \in N$. *Dacă* $\rho_k \neq \rho_{k+1}$ *atunci* $|S/\rho_k| \geqslant k + 1$.

Demonstrație. Este suficient să arătăm că, din $\rho_k = \rho_{k+1}$ urmează $\rho_k = \rho_{k+2}$. Fie $p \in I^*$, $l(p) = k + 2$ și $p = iq$, $i \in I$, $l(q) = k + 1$.

Fie apoi $(s, s_2) \in \rho_{k+1}$. De aici urmează, conform teoremei II.5.1 că $(f(s_1, i), f(s_2, i)) \in \rho_k$ deci $(f(s_1, i), f(s_2, i)) \in \rho_{k+1}$, deoarece $\rho_k = \rho_{k+1}$.

Atunci

$$g(s_1, p) = g(s_1, iq) = g(f(s_1, i), q) = g(f(s_2, i), q) = g(s_2, iq) =$$

$$= g(s_2, p), \quad \forall p \in I^*, \quad l(p) = k + 2.$$

Pentru a arăta că din $\rho_k \neq \rho_{k+1}$ urmează $|S/\rho_k| \geqslant k+1$ este destul să observăm că dacă $\rho_1 \neq \rho_2$ atunci $|S/\rho_1| \geqslant 2$. Aceasta, deoarece din

$$\rho_1 > \rho_2 > \ldots > \rho_k > \rho_{k+1}$$

urmează

$$|S/\rho_1| < |S/\rho_2| < \ldots < |S/\rho_k| < |S/\rho_{k+1}|,$$

și dacă

$$|S/\rho_1| \geqslant 2,$$

atunci

$$|S/\rho_2| \geqslant 3, \ldots, |S/\rho_k| \geqslant k+1.$$

Presupunînd $\rho_1 \neq \rho_2$ și $|S/\rho_1| = 1$ am avea $(s_1, s_2) \in \rho_1$ pentru orice stări $s_1, s_2 \in S$ și, în particular pentru $f(s_1, i)$ și $f(s_2, i)$. Așadar, am avea $(f(s_1, i), f(s_2, i)) \in \rho_1$. În acest caz, conform teoremei II.5.3 $(s_1, s_2) \in \rho_2$ deci $\rho_1 \leqslant \rho_2$ și cum $\rho_1 \geqslant \rho_2$ ar urma $\rho_1 = \rho_2$, ceea ce contrazice ipoteza. Deci $|S/\rho_1| \geqslant 2$. ■

Teorema II.5.5. *În automatul determinist A, S-finit, cu $|S| = n > 0$, stările s_1 -și s_2 sînt echivalente $((s_1, s_2) \in \rho)$ dacă și numai dacă $(s_1, s_2) \in \rho_{n-1}$, adică $g(s_1, p) = g(s_2, p)$, $\forall p \in I^{*(n-1)}$.*

Demonstrație. Să particularizăm rezultatele din teorema precedentă pentru cazul automatelor deterministe S-finite cu $|S| = n$.

Șirul

$$\rho_1 \geqslant \rho_2 \geqslant \ldots \geqslant \rho_k \geqslant \ldots \geqslant \rho,$$

devine cu necesitate staționar cel mult de la $k = n - 1$, deoarece pot exista cel mult n clase și deci $|S/\rho_{n-1}| = n$. ■

Observația II.5.4. Teorema II.5.5 asigură decidabilitatea* proprietății de echivalență a două stări atunci cînd automatul A este (I, S)-finit.

Pe mulțimile de stări ale automatelor, în afară de relația de echivalență introdusă prin definiția II.5.1. mai pot fi introduse și alte relații. Astfel:

Definiția II.5.3. Fie $A = [S, f, g] \in \mathbf{Aut}\ (I, O)$ și $s_1, s_2 \in S$. Perechea (s_1, s_2) se află în relația de:

1. *semiseparabilitate*, dacă $\exists p \in I^*$, $g(s_1, p) \neq g(s_2, p)$,
2. *n-semiseparabilitate*, dacă $\exists p \in I^*$, $l(p) \leqslant n$, $g(s_1, p) \neq g(s_2, p)$,
3. *separabilitate*, dacă $\exists p \in I^*$, $g(s_1, p) \cap g(s_2, p) = \varnothing$,

* O proprietate este decidabilă dacă există un algoritm care, într-un număr finit de pași verifică valabilitatea proprietății respective.

4. *n-separabilitate* dacă $\exists p \in I^*$, $l(p) \leqslant n$, $g(s_1, p) \cap g(s_2, p) = \emptyset$,

5. *n-separabilitate strictă* dacă se află în relația de n-separabilitate și în relația de $(n-1)$-echivalență.

Definiția II.5.4. Mulțimile de stări S_1, $S_2 \subseteq S$ au respectiv proprietățile de semiseparabilitate, n-semiseparabilitate, separabilitate, n-separabilitate dacă, concepute ca stări ale macroautomatului $M(A)$ (vezi definiția II.1.7) au proprietățile corespunzătoare.

Observația II.5.5. Stările separabile (m-separabile) sînt semiseparabile (m-semiseparabile).

Stările separabile (semiseparabile) sînt n-separabile (n-semiseparabile), $\forall n \in N^*$.

Dacă $m \leqslant n$, n-separabilitatea (n-semiseparabilitatea) implică m-separabilitatea (m-semiseparabilitatea).

În automate S-determinate are loc:

Teorema II.5.6. *Dacă stările s_1, s_2 sînt strict $(k+1)$-separabile atunci există o pereche de stări s_1', s_2' strict k-separabile.*

Demonstrație. Fie $p = i_1 i_2 \ldots i_{k+1} \in I^*$ cu $g(s_1, p) \cap g(s_2, p) = \emptyset$.

Perechea de stări (s_1', s_2'), unde $s_1' = f(s_1, i_1)$, $s_2' = f(s_2, i_1)$ sînt strict k-separabile.

Mai întîi este evident că stările s_1', s_2' sînt k-separabile (fiindcă $g(f(s_1, i_1), i_2 \ldots i_{k+1}) \cap g(f(s_2, i_1), i_2 \ldots i_{k+1}) = \emptyset$). Apoi stările s_1', s_2' sînt chiar strict k-separabile deoarece dacă ar exista un cuvînt $q \in I^*$ cu $l(q) < k$ și $g(s_1', q) \neq g(s_2', q)$, deci $g(f(s_1, i_1), q) \cap g(f(s_2, i_1) q) = \emptyset$ ar urma $g(s_1, i_1 q) \cap \cap g(s_2, i_1 q) = \emptyset$ cu $l(i_1 q) < k + 1$, ceea ce contrazice ipoteza teoremei. ■

Observația II.5.6. În cazul automatelor deterministe relațiile de separabilitate și semiseparabilitate (k-separabilitate și k-semiseparabilitate) coincid și, mai mult, ele sînt complementarele relației de echivalență ρ (ale relației de echivalență ρ_k).

Observația II.5.7. Dacă mulțimile de stări S_1, $S_2 \subseteq S$ sînt semiseparabile (m-semiseparabile) atunci considerate ca stări în macroautomatul $M(A)$ ele nu sînt echivalente și reciproc.

Acest fapt ne va permite să studiem semiseparabilitatea cu ajutorul relației de echivalență din macroautomat.

În baza observației II.1.2 putem aplica rezultatele precedente obținute pentru automate deterministe macroautomatului $M(A)$ atașat automatului A.

Dacă automatul A este S-finit, cu $|S| = n$, macroautomatul $M(A)$ este tot un automat S-finit avînd ca mulțime de stări mulțimea $\mathcal{P}^*(S)$, $|\mathcal{P}^*(S)| = 2^n - 1$. Din teorema II.5.5 rezultă:

Teorema II.5.7. *Mulțimile de stări S_1, $S_2 \subseteq S$ sînt semiseparabile dacă și numai dacă există un cuvînt $p \in I^*$, $l(p) \leqslant 2^n - 2$ astfel ca $g(S_1, p) = g(S_2, p)$.*

Observația II.5.8. Acest rezultat rămîne valabil pentru stări, punînd $S_1 = \{s_1\}$ și $S_2 = \{s_2\}$.

§ II.6. ECHIVALENȚE DE AUTOMATE

Automatele considerate în acest paragraf aparțin mulțimii **Aut** (I, O). Relațiile ρ și ρ_n introduse între stările aceluiași automat (vezi §II.5) pot fi extinse între mulțimile de stări a două automate diferite.

Fie automatele $A_j = [S_j, f_j, g_j]$, $j = 1, 2$.

Definiția II.6.1. *Stările* $s_1 \in S_1$ și $s_2 \in S_2$ sînt *echivalente*, $(s_1, s_2) \in \rho$ dacă

$$g_1(s_1, p) = g_2(s_2, p), \quad \forall p \in I^*, \quad p \neq e,$$

și $(s_1, s_2) \in \rho_n$, dacă:

$$g_1(s_1, p) = g_2(s_2, p), \quad \forall p \in I^*, \quad 0 < l(p) \leqslant n.$$

Observația II.6.1. Afirmațiile din observația II.5.1 își păstrează valabilitatea și în acest caz.

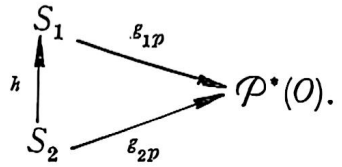
Propunem cititorului să încerce extinderea teoremelor II.5.1—3.

Definiția II.6.2. *Automatul* $A_1 = [S_1, f_1, g_1]$ *acoperă (n-acoperă) automatul* $A_2 = [S_2, f_2, g_2]$, dacă există $h: S_2 \to S_1$ astfel ca $(s_2, h(s_2)) \in \rho((s_2, h(s_2)) \in \rho_n)$. Vom numi *h aplicația de acoperire.*

Relația de acoperire (n-acoperire) între automate o notăm $A_1 > A_2 (A_1 \overset{n}{>} A_2)$.

Să constată imediat că relațiile „$>$" și „$\overset{n}{>}$" sînt relații de preordine, adică reflexive și tranzitive.

Observația II.6.2. Definiția II.6.2 este echivalentă cu existența aplicației h care face comutativ triunghiul



Definiția II.6.3. *Automatele* A_1 și A_2 sînt *echivalente (n-echivalente)* dacă $A_1 > A_2$ și $A_2 > A_1$ ($A_1 \overset{n}{>} A_2$ și $A_2 \overset{n}{>} A_1$), ceea ce se va scrie $A_1 \sim A_2$ ($A_1 \overset{n}{\sim} A_2$).

Fie $A_j = [S_j, f_j, g_j]$, și $M(A_j)$, $j = 1, 2$ macroautomatele atașate.

Definiția II.6.4. *Automatul* A_1 *acoperă slab (n-acoperă slab) automatul* A_2 dacă $M(A_1) > A_2 (M(A_1) \overset{n}{>} A_2)$. Acest fapt se notează $A_1 \gg A_2$ ($A_1 \overset{n}{\gg} A_2$).

Definiția II.6.5. *Automatele* A_1 și A_2 sînt *slab echivalente (slab n-echivalente)* dacă $M(A_1) \gg A_2$ și $M(A_2) \gg A_1$ ($M(A_1) \overset{n}{\gg} A_2$ și $M(A_2) \overset{n}{\gg} A_1$) ceea ce se va nota $A_1 \approx A_2 (A_1 \overset{n}{\approx} A_2)$.

Denumirea de echivalență, respectiv slab-echivalența dată relațiilor $\sim$ și $\approx$ se justifică prin proprietățile lor de reflexivitate, simetrie și tranzitivitate.

Definiția II.6.6. *Automatul* A este *redus* dacă $\rho = \iota_S$, adică din $(s_1, s_2) \in \rho$ rezultă $s_1 = s_2$. Automatul A_1 este automatul redus al automatului A, dacă $A_1 \sim A$ și A_1 este redus.

Definiția II.6.7. *Automatul* A este *tare redus* dacă pentru macroautomatul $M(A)$ relația $(S_1, S_2) \in \rho$ cu $|S_1| = 1$, implică $(S_1, S_2) \in \iota_{\rho^*(S)}$, adică $S_1 = S_2$. Automatul A_1 este automatul tare redus al automatului A, dacă $A_1 \approx A$ și A_1 este tare redus.

Definiția II.6.8. *Automatul* A este *ultra redus* dacă macroautomatul $M(A)$ este redus. Automatul A_1 este automatul ultra redus al automatului A, dacă $A_1 \approx A$ și A_1 este ultra redus.

Observația II.6.3. Un automat ultra redus este tare redus, iar un automat tare redus este redus.

Observația II.6.4. Pentru automatele deterministe noțiunile de automat redus și tare redus coincid.

Un automat determinist A este redus dacă și numai dacă familia de aplicații $\{g_p\}_{p \in I^*}$ este monomorfică. Într-adevăr, să presupunem că pentru aplicațiile $k_1, k_2 \colon S' \to S$ avem $g_p k_1 = g_p k_2$, $\forall p \in I^*$. Atunci fie $s' \in S'$ și $s_1 = k_1(s')$ și $s_2 = k_2(s')$. Urmează că $g_p(k_1(s')) = g_p(k_2(s'))$ pentru orice p, ceea ce arată că $(k_1(s'), k_2(s')) \in \rho$. Cum automatul A este redus $k_1(s') = k_2(s')$ adică $k_1 = k_2$. ■

Următoarele exemple de automate nedeterministe asigură că noțiunile introduse prin definițiile II.6.6.—8 sînt proprii.

Exemplul II.6.1. Automatul $A = [\{i\}, \{s_1, s_2\}, \{\alpha, \beta\}, f, g]$ unde f și g sînt definite prin următoarele tabele

f	s_1	s_2
i	$\{s_1\}$	$\{s_1, s_2\}$

g	s_1	s_2
i	$\{\alpha\}$	$\{\alpha, \beta\}$

este redus, dar nu este tare redus. Într-adevăr $(s_1, s_2) \notin \rho$, iar $(\{s_2\}, \{s_1, s_2\}) \in \rho$.

Exemplul II.6.2. Automatul $A = [\{i\}, \{s_1, s_2, s_3\}, \{\alpha, \beta, \gamma\}, f, g]$ unde f și g sînt dați prin tabelele

f	s_1	s_2	s_3
i	$\{s_1, s_2, s_3\}$	$\{s_1, s_2, s_3\}$	$\{s_1, s_2, s_3\}$

g	s_1	s_2	s_3
i	$\{\alpha, \beta\}$	$\{\beta, \gamma\}$	$\{\gamma, \alpha\}$

este tare redus, dar nu este ultra redus.

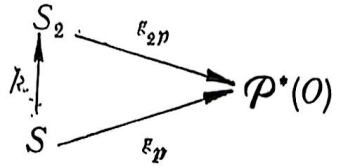
Teorema II.6.1. *Fie* $A_j = [S_j, f_j, g_j]$ $j = 1, 2$, *două automate deterministe şi* $A_1 > A_2$. *Atunci există un subautomat* A *al lui* A_1 *cu* $A \sim A_2$.

Demonstraţie. Fie $S = h(S_2) \subseteq S_1$ unde h este aplicaţia de acoperire.

Definim $A = [S, f, g]$ unde $f = f_1|_{S\times I}$, $g = g_1|_{S\times I}$. Exte clar că A este un subautomat al automatului A_1 şi vom arăta că $A \sim A_2$.

Deoarece prin modul de definire al lui A avem $A > A_2$ rămîne de arătat că $A_2 > A$, cu alte cuvinte rămîne să demonstrăm existenţa aplicaţiei $k{:}S \to S_2$ astfel ca diagrama

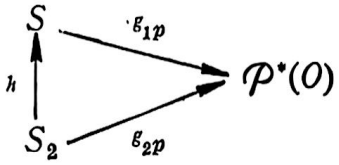
(II.6.1)



să fie comutativă, pentru orice $p \in I^*$.

În acest scop să observăm că diagrama

(II.6.2)



este comutativă, iar h este o aplicaţie surjectivă. Fie atunci $s \in S$ şi să definim k astfel ca să avem $k(s) \in h^{-1}(s)$. În acest caz vom aplica egalitatea $g_{2p}(s_2) = g_{1p}(h(s_2))$ stării $s_2 = k(s)$, unde $s \in S = h(S_2)$. Observînd că $h(k(s)) = s$ obţinem $g_{2p}(k(s)) = g_{1p}(h(k(s))) = g_{1p}(s)$, ceea ce atrage comutativitatea diagramei (II.6.1). ■

Teorema II.6.2. *Orice automat* $A = [S, f, g]$ *posedă cel puţin un redus* $A_1 = [S_1, f_1, g_1]$.

Demonstraţie. Este suficient să observăm că automatul A/ρ (vezi definiţia II.1.10) este redus şi echivalent cu A.

Fie $s \in [s]$, unde $[s]$ este un element al partiţiei ataşată lui ρ, deci o stare a automatului A/ρ. Avem $g(s, p) = g([s], p)$, $\forall p \in I^*$. Într-adevăr, fie şi $s' \in [s]$, adică $(s, s') \in \rho$. Atunci $g(s, p) = g(s', p)$ pentru $\forall p \in I^*$ şi deci $g([s], p) = \bigcup_{s' \in [s]} g(s', p) = g(s, p)$.

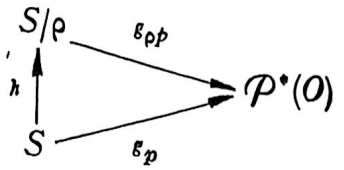
Invers, dacă pentru un $s \in S$, $g(s, p) = g([s'], p)$, $\forall p \in I^*$, atunci $s \in [s']$, deoarece $g(s, p) = g(s', p)$, $\forall s' \in [s']$, $p \in I^*$, adică $(s, s') \in \rho$.

Fie acum $([s], [s']) \in \rho$. Atunci, $g([s], p) = g([s'], p)$, $\forall p \in I^*$. Din $s \in [s]$ urmează $s \in [s']$, deci $[s] = [s']$.

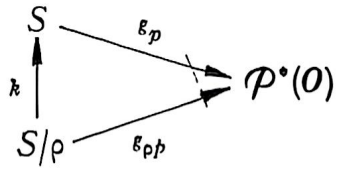
Rămîne încă de arătat că $A/\rho \sim A$. Pentru aceasta definim $h{:}S \to S/\rho$ prin $h(s) = [s]$, unde $s \in [s]$ şi $k{:}S/\rho \to S$ prin $k([s]) = s$, unde $s \in [s]$. Remarcăm aici că definiţia lui k nu este unică şi că intervine în mod esenţial în demonstraţie axioma alegerii, cu ajutorul căreia îl putem defini pe k.

Diagramele (II.6.3) și (II.6.4) sînt comutative:

(II.6.3)



(II.6.4)

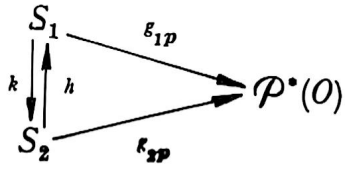


Într-adevăr, $g_{\rho p}(h(s)) = g_{\rho p}([s]) = g_p(s)$, conform celor de mai sus, iar $g_p(k\,[s]) = g_p(s) = g_{\rho p}([s])$. ■

Teorema II.6.3. *Automatele reduse ale unui automat au mulțimi de stări echipotente. Dacă A este S-finit aceasta revine la faptul că toate automatele reduse au același număr de stări.*

Demonstrație. Fie $A_j = [S_j, f_j, g_j]$ $j = 1, 2$ două automate reduse oarecare ale automatului A. Automatele A_1, A_2 fiind echivalente, diagrama (II.6.5) este comutativă, $\forall p \in I^*$,

(II.6.5)



ceea ce revine la existența aplicațiilor $h\colon S_2 \to S_1$, $k\colon S_1 \to S_2$ care satisfac egalitățile:

$$g_{1p}h = g_{2p},$$

$$g_{2p}k = g_{1p}.$$

De aici găsim:

(II.6.6) $$g_{1p}hk = g_{1p},$$

(II.6.7) $$g_{2p}kh = g_{2p}.$$

Familiile de aplicații $\{g_{1p}\}$, $\{g_{2p}\}$ sînt monomorfice deoarece automatele A_1, A_2 sînt reduse.

Astfel relațiile (II.6.6) și (II.6.7) ne dau:

$$hk = 1_{S_1}, \qquad kh = 1_{S_2},$$

ceea ce arată că aplicațiile h, k sînt bijecții, adică mulțimile S_1 și S_2 sînt echipotente. Cea de a doua afirmație a teoremei rezultă în mod evident. ■

Observația II.6.5. Fie $A_1 = [S_1, f_1, g_1]$ un automat redus al automatului $A = [S, f, g]$. Atunci $|S_1| \leqslant |S|$.

Este suficient să observăm că $|S/\rho| \leqslant |S|$ și să ținem seama de teorema precedentă. ■

Observația II.6.6. Automatele reduse ale automatului A au numărul minim de stări din clasa automatelor echivalente cu A.

Rezultă din observația precedentă și din faptul că un automat redus al lui A este redusul oricărui automat echivalent cu A.

În timp ce orice automat posedă un automat redus echivalent (cel puțin automatul A/ρ) nu orice automat nedeterminist posedă un tare redus sau un ultra redus. Atragem atenția asupra faptului că un automat redus pentru $M(A)$ nu este în mod necesar un automat ultra redus pentru A deoarece în general automatele A și $M(A)/\rho$ nu sînt slab echivalente.

Ne vom ocupa în continuare de caracterizarea automatelor care posedă un automat tare redus.

Teorema II.6.4. *Fie $A = [S, f, g]$ un automat nedeterminist redus, $A' = [S', f', g']$ un tare redus al său și fie*

$$\hat{S} = \{s \mid \exists S_1 \subseteq S, \quad (S_1, s) \in \rho, \quad S_1 \neq \{s\}\}. \tag{II.6.8}$$

Atunci nu există $\hat{s} \in \hat{S}$, $s' \in S'$ astfel ca $(\hat{s}, s') \in \rho$.

Demonstrație. Să presupunem, prin reducere la absurd că ar exista $\hat{s} \in \hat{S}$, $s' \in S'$ astfel ca $(\hat{s}, s') \in \rho$.

Pentru $\hat{s} \in \hat{S}$ există $S_1 \subseteq S$ cu $(\hat{s}, S_1) \in \rho$ și $S_1 \neq \{\hat{s}\}$, conform relației (II.6.8).

Deoarece $A \approx A'$, $\forall s \in S_1$, $\exists S'(s) \subseteq S'$ cu $(s, S'(s)) \in \rho$. Atunci $(S_1, R') \in \rho$ unde $R' = \bigcup_{s \in S_1} S'(s)$ și din $(R', S_1) \in \rho$, $(S_2, \hat{s}) \in \rho$, $(\hat{s}, s') \in \rho$ urmează $(R', s') \in \rho$, deci $R' = \{s'\}$ deoarece A' este tare redus. Prin urmare pentru orice $s \in S_1$ avem $S'(s) = \{s'\}$ și, deoarece $(S'(s), s) \in \rho$ avem $(s', s) \in \in \rho$, adică $(s, \hat{s}) \in \rho$. Cum A este redus, urmează $s = \hat{s}$ și $\{\hat{s}\} = S_1$ deoarece s era o stare oarecare din S_2, ceea ce contrazice presupunerea $S_1 \neq \{\hat{s}\}$. ■

Teorema II.6.5. *Fie $A = [S, f, g]$ un automat nedeterminist redus, $A' = [S', f', g']$ un tare redus al său, atunci $A > A'$.*

Demonstrație. Deoarece A' este un tare redus pentru A avem $A' \approx A$, de unde $A \geqslant A'$. Cum A este redus va rezulta chiar $A > A'$. Într-adevăr, fie $s' \in S'$. Există $S(s') \subseteq S$ cu $(s', S(s')) \in \rho$ adică $g'_p(s') = g_p(S(s'))$, $\forall p \in I^*$. Fie $s \in S(s')$. Există atunci $S'(s) \subseteq S'$, $S'(s) \neq \emptyset$ astfel ca $(s, S'(s)) \in \in \rho$, deci $g_p(s) = g'_p(S'(s))$.

Dar $g_p(s) \subseteq g_p(S(s'))$ și urmează:

$$g'_p(s') = g_p(S(s')) \supseteq g_p(s) = g'_p(S'(s)),$$

de unde $g'_p(s') \supseteq g'_p(S'(s))$, deci $g'_p(s') = g'_p(S'(s) \cup \{s'\})$, prin urmare $S'(s) = \{s'\}$ deoarece A' este tare redus.

Conchidem atunci că, $\forall s \in S(s')$, $(s, s') \in \rho$ și deci pentru $s_1, s_2 \in S(s')$, $(s_1, s_2) \in \rho$, deci $s_1 = s_2$ automatul A fiind redus. Astfel mulțimea $S(s')$ are un singur element și $S(s') = s$, de unde $A > A'$. ■

Teorema II.6.6. *Automatul redus $A = [S, f, g]$ posedă un automat tare redus dacă și numai dacă:*

$$\forall \hat{s} \in \hat{S}, \quad \exists S(\hat{s}) \subseteq S, \quad (S(\hat{s}), \hat{s}) \in \rho, \quad S(\hat{s}) \cap \hat{S} = \emptyset$$

unde mulțimea $\hat{S}$ a fost definită prin relația (II.6.8).

Demonstrație. Condiția este necesară. Vom presupune că automatul A posedă un tare redus $A' = [S', f', g']$ și vom arăta că, pentru $\forall \hat{s} \in \hat{S}$, $\exists S(\hat{s})$ cu $(S(\hat{s}), \hat{s}) \in \rho$ și $S(\hat{s}) \cap \hat{S} = \emptyset$.

Deoarece $A' \gg A$, pentru $\forall \hat{s} \in \hat{S}$ există o mulțime $S'(\hat{s}) \subseteq S'$ cu $S'(\hat{s}), \hat{s}) \in \rho$. Să definim acum $S(\hat{s}) = \{s \mid s \in S, \exists s' \in S'(\hat{s}), (s, s') \in \rho\}$.

Din $A > A'$ (v. teor. II.6.5) urmează $S(\hat{s}) \neq \emptyset$ și mai mult $(S'(\hat{s}), S(\hat{s})) \in \rho$ deci $(S(\hat{s}), \hat{s}) \in \rho$ deoarece avem și $(S'(\hat{s}), \hat{s}) \in \rho$.

Să observăm că pentru $\hat{s} \in \hat{S}$ mulțimea $S(\hat{s})$ satisface condiția din enunț, deci $S(\hat{s}) \cap \hat{S} = \emptyset$. Dacă $S(\hat{s}) \cap \hat{S} \neq \emptyset$, ar exista $s_0 \in S(\hat{s}) \cap \hat{S}$ și conform cu definiția mulțimii $S(\hat{s})$ există un $s' \in S'(\hat{s}) \subseteq S'$ cu condiția $(s', s_0) \in \rho$, ceea ce contrazice teorema II.6.4.

Condiția este suficientă. Vom demonstra acum, că, dacă condiția din enunț este îndeplinită automatul A posedă un automat A' tare redus. În continuare, vom construi efectiv automatul A'.

Fie $A' = [S \setminus \hat{S}, f', g']$, unde $f' = f|_{(S \setminus \hat{s}) \times I}$ și $g' = g|_{(S \setminus \hat{s}) \times I}$.

Remarcăm că:

$$g_p(S_1) = g'_p(S_1), \qquad \forall S_1 \subseteq S \setminus \hat{S}, \quad p \in I^*.$$

Avem $A > A'$, cum rezultă din formula (II.6.9) luînd $S_1 = \{s_1\}$.

Mai rămîne de arătat că $A' \gg A$ și că A' este tare redus.

Fie $s \in S$. Dacă $s \in S \setminus \hat{S}$, $(s, \{s\}) \in \rho$, iar dacă $s \in \hat{S}$ conform ipotezei $\exists S(s)$, $(S(s), s) \in \rho$, $S(s) \subseteq S \setminus \hat{S}$.

Prin urmare $A \approx A'$.

Să presupunem că în automatul A', $(s, S_1) \in \rho$, $s \in S \setminus \hat{S}$, $S_1 \subseteq S \setminus \hat{S}$. Atunci, conform formulei (II.6.9), $(s, S_1) \in \rho$ și în automatul A. Dacă $\{s_1\} \neq S_1$ urmează $s \in \hat{S}$, conform formulei de definiție a lui $\hat{S}$ (II.6.8). Urmează $\{s\} = S_1$ și A' tare redus. ■

Relația de echivalență dintre automate ne permite elucidarea legăturii între automatele de tip Moore și Mealy.

Observația II.6.7. Orice automat Moore poate fi conceput ca un automat Mealy alegînd $g(s, i) = h(s)$, $\forall i \in I$, în cazul automatelor Moore cu întîrziere și $g(s, i) = h(f(s, i))$ pentru automatele Moore imediate.

Este interesantă de aceea teorema următoare, care precizează că automatele Moore sînt „la fel de puternice" ca și automatele Mealy.

Teorema II.6.7. *Pentru fiecare automat Mealy există un automat Moore echivalent.*

Demonstrație. Fie $A = [I, S, O, f, g]$ un automat Mealy. Atunci automatul Moore $A' = [I, S', O, f', h']$, unde $S' = O \times S$, $f'((o, s), i) = (g(s, i), f(s, i))$, iar $h'((o, s)) = o$ este echivalent cu A.

Conform observației II.6.7 vom concepe aici automatul Moore ca un caz particular de automat Mealy punînd $g'((o, s), i) = o$.

Să arătăm că $A' > A$. Va fi suficient să arătăm că $(s, (o, s)) \in \rho$, $\forall s \in S$.

Într-adevăr, $g(s, i) = h'((o, s)) = g'((o, s), i)$ în baza observației II.6.7 și mai mult $g(S_1, i) = g'((O_1, S_1), i)$, unde $S_1 \subseteq S$ și $O_1 \subseteq O$.

Prin inducție, după $l(p)$ să arătăm că $g(s, p) = g'((o, s), p)$.

Pentru $l(p) = 1$ relația se verifică. S-o presupunem adevărată pentru $l(p) = n$ și să trecem la $l(q) = n + 1$.

Fie $q = ip$. Atunci $g'((o, s), ip) = g'(f'((o, s), i), p) = g'((g(s, i), f(s, i)), p) = g(f(s, i), p) = g(s, ip)$.

La fel se arată că $A > A'$ deoarece pentru orice stare $(o, s) \in S'$ există starea $s \in S$ cu $((o, s), s) \in \rho$. Deci $A \sim A'$. ■

Observația II.6.8. Automatul Moore echivalent unui automat Mealy determinist este un automat determinist.

Pentru automate Mealy *nedeterministe* pe lîngă rezultatul teoremei II.6.7 are loc:

Teorema II.6.8. *Fie A un automat Mealy nedeterminist. Există un automat Moore determinist A' cu $A' > A$.*

Demonstrație. Fie $M(A)$ macroautomatul atașat lui A. $M(A)$ este un automat Mealy determinist și $M(A) > A$. Automatul Moore determinist $A' \sim M(A)$, a cărui existență este asigurată de teorema II.6.7 satisface cerințele acestei teoreme. ■

§ II.7. HOMOMORFISME DE AUTOMATE

Fie $A_j = [I_j, S_j, O_j, f_j, g_j]$, $j = 1, 2$ și tripletul de aplicații

$$\chi = (t, u, v), \quad t: I_1 \to I_2; \quad u: S_1 \to S_2, \quad v: O_1 \to O_2.$$

Aplicațiile t, u și v vor fi extinse în mod natural punînd:

$$u(S_1') = \bigcup_{s_1 \in S_1'} u(s_1), \quad S_1' \subseteq S,$$

$$v(O_1') = \bigcup_{o_1 \in O_1'} v(o_1), \quad O_1' \subseteq O_1,$$

$$t(p) = t(i_1\, i_2 \ldots i_n) = t(i_1)\, t(i_2) \ldots t(i_n), \quad \forall p \in I^*.$$

Definiția II.7.1. Tripletul $\chi = (t, u, v)$ este *homomorfism* între automatele A_1 și A_2, $\chi: A_1 \to A_2$ dacă diagramele:

$$\begin{array}{ccc} S_1 \times I_1 & \xrightarrow{f_1} & \mathcal{P}^*(S_1) \\ {\scriptstyle (u,t)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle u} \\ S_2 \times I_2 & \xrightarrow[f_2]{} & \mathcal{P}^*(S_2) \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} S_1 \times I_1 & \xrightarrow{g_1} & \mathcal{P}^*(O_1) \\ {\scriptstyle (u,t)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle v} \\ S_2 \times I_2 & \xrightarrow[g_2]{} & \mathcal{P}^*(O_2) \end{array}$$

sînt comutative.

Observația II.7.1. Se constată imediat că tripletul $\chi = (t, u, v)$ aplică homomorf A_1 și A_2 dacă și numai dacă

$$uf_{1p} = f_{2t(p)}u, \quad vg_{1p} = g_{2t(p)}u, \quad \forall p \in I^*. \tag{II.7.1}$$

Definiția II.7.2. Tripletul $\Psi = (t, u, y)$, $t: I_1 \to I_2$, $u: S_1 \to S_2$, $y: O_2 \to O_1$ este o *simulare* a automatului A_1 de către automatul A_2 dacă diagrama

$$\begin{array}{ccc} I_1^* & \xrightarrow{g_{1s_1}} & \mathcal{P}^*(O_1) \\ {\scriptstyle t}\downarrow & & \uparrow{\scriptstyle y} \\ I_2^* & \xrightarrow[g_{2u(s_1)}]{} & \mathcal{P}^*(O_2) \end{array}$$

este comutativă.

Dacă A_2 simulează A_1 acest lucru se va nota $A_1 \mid A_2$ și se va citi „A_1 divide pe A_2".

Dacă $A_1 \mid A_2$ și $A_2 \mid A_1$ automatele A_1 și A_2 se zic *automate asociate*.

Este ușor de văzut că asocierea este o relație de echivalență.

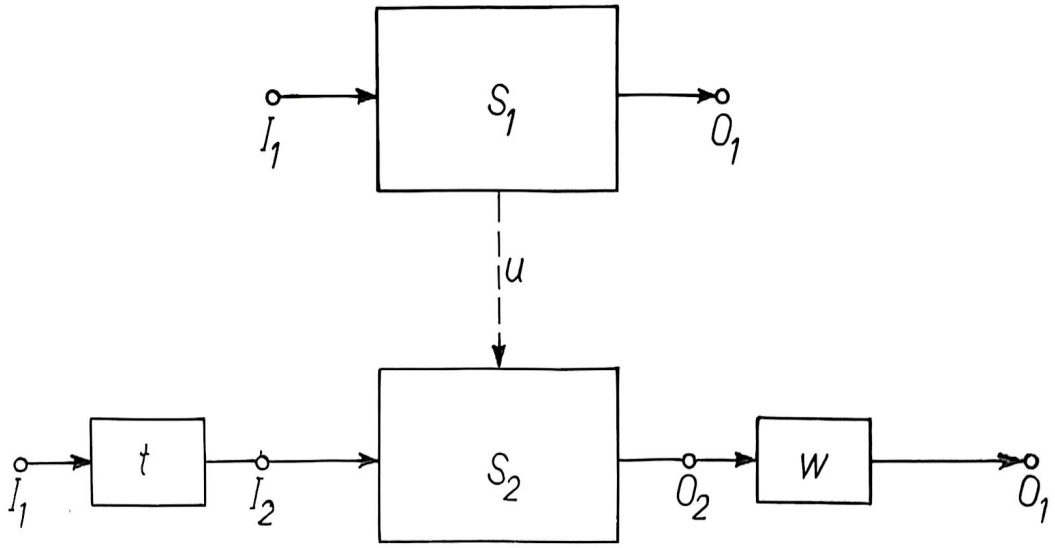
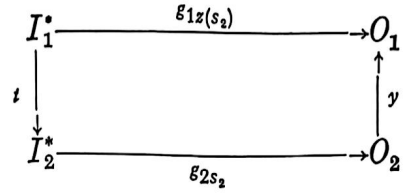


Fig. II. 7.1

*Observația II.*7.2. Noțiunea de simulare poate fi interpretată astfel: Automatul A_2 prevăzut cu dispozitivul de codificare * descris de funcția $t: I_1 \to I_2$ și cu cel de decodificare descris de funcția $y: O_2 \to O_1$ realizează aceeași activitate de prelucrare a informației ca și automatul A_1 (vezi figura II.7.1).

Teorema II.7.1. *Fie A_1 un automat determinist redus. Automatul determinist A_2 simulează A_1, $A_1 | A_2$ dacă și numai dacă există tripletul de aplicație (t, z, y), unde $t: I_1 \to I_2$, $z: S_0 \to S_1$, $S_0 \subseteq S_2$, z fiind surjectivă, și $y: O_2 \to O_1$ astfel ca diagrama*

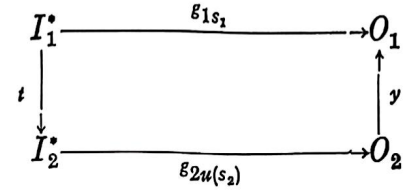
(II.7.1)



să fie comutativă.

Demonstrație. Să presupunem că $A_1 | A_2$. Atunci există aplicațiile $t: I_1 \to I_2$, $u: S_1 \to S_2$, $y: O_2 \to O_1$ care fac comutativă diagrama

(II.7.2)



adică $g_{1s_1} = y g_{2,u(s_1)} t$. Să arăm că aplicația u este injectivă.

* Dispozitivele de codificare sau de decodificare (după sensul fluxului informațional) sînt „cutii negre" care realizează o corespondență între simbolii aparținînd la două alfabete.

Din $u(s_1') = u(s_1')$, urmează $g_{1s_1'} = yg_{2,\,u(s_1')}t = yg_{2,\,u(s_1'')}t = g_{1s_1''}$ deci $s_1' = s_1''$, automatul A_1 fiind redus.

Fie atunci $S_0 = u(S_1)$, $S_0 \subseteq S_2$ și definim aplicația surjectivă $z : S_0 \to S_1$ prin $z = u^{-1}$. Este clar atunci că $g_{1,\,z(s_2)} = yg_{2s_2}t$, adică diagrama (II.7.1) este comutativă.

Reciproc, dacă diagrama (II.7.1) este comutativă, z fiind o aplicație surjectivă, $\forall s_1 \in S_1$, $\exists s_2 \in S_2$ astfel ca $s_1 = z(s_2)$. Alegînd un astfel de s_2 definim $u(s_1) = s_2$ și deci diagrama (II.7.2) este comutativă. ■

Remarcăm că în demonstrarea comutativității diagramei (II.7.2) nu a intervenit faptul că automatul A_1 este redus.

Definiția II.7.3. Fie $I_1 = I_2$ și $t = 1_{I_1}$. Atunci tripletul $= (1_{I_1}, u, v)$ este un $\{S, O\}$ - homomorfism de la A_1 la A_2.

Analog se definesc X-homomorfismele, unde $X \in \mathcal{P}^*(\{I, S, O\})$.

Clasa automatelor formează o categorie **Aut** avînd ca obiecte automatele și ca morfisme, homomorfismele introduse prin definiția II.7.1; automatele X-finite ($X \in \mathcal{P}^*(\{I, S, O\})$) formează o subcategorie în **Aut**; la fel și automatele deterministe. Vom nota cele două subcategorii respectiv cu **Autf** și **Autd**.

Teorema II.7.2. [*Căzănescu V.E.* [1]]. *Morfismul* $\chi : A_1 \to A_2$, $\chi = (t, u, v)$ *este un monomorfism în* **Aut** *dacă și numai dacă aplicațiile* t, u, v *sînt injective.*

Demonstrație. Condiția este suficientă. Să presupunem că aplicațiile t, u, v sînt injective și că χ n-ar fi monomorfism. Atunci, ar exista morfismele $\chi', \chi'' : A \to A_1$, $\chi' \neq \chi''$, dar $\chi\chi' = \chi\chi''$.

$$A \underset{\chi''}{\overset{\chi'}{\rightrightarrows}} A_1 \xrightarrow{\chi'} A_2$$

Din $\chi' \neq \chi''$ urmează că cel puțin una din inegalitățile $t' \neq t''$, $u' \neq u''$, $v' \neq v''$ are loc. Fie, de exemplu $t' \neq t''$, ceea ce revine la existența unui $i \in I$ cu $t'(i) \neq t''(i)$ și deci $tt' \neq tt''$, cu alte cuvinte $\chi\chi' \neq \chi\chi''$, ceea ce contrazice presupunerea făcută. Similar se tratează și celelalte două cazuri.

Condiția este necesară. Să presupunem că χ este un monomorfism.

Vom arăta, pe rînd că fiecare din aplicațiile t, u, v sînt injective.

Dacă v n-ar fi aplicație injectivă ar exista $o', o'' \in O_1$ cu $o' \neq o''$, $v(o') = v(o'')$. Definim automatul $A = [I_1, S_1, O_1 \cup \{o_0\}, f_1, g_1]$ unde $o_0 \notin O_1$ și morfismele $\chi' = (1_{I_1}, 1_{S_1}, v')$, $\chi'' = (1_{I_1}, 1_{S_1}, v'')$, unde

$$v'(o) = \begin{cases} o, & o \in O_1 \\ o', & o = o_0 \end{cases} \quad \text{și} \quad v''(o) = \begin{cases} o, & o \in O_1 \\ o'', & o = o_0 \end{cases}$$

Evident $\chi' \neq \chi''$, dar $\chi\chi' = \chi\chi''$, ceea ce contrazice faptul că χ este un monomorfism.

Dacă u n-ar fi aplicație injectivă ar exista $s', s'' \in S_1$ cu $s' \neq s''$, $u(s') = u(s'')$. Definim automatul $A = [I, S, O, f, g]$ unde $I = \{i\}$, $S = O = N$,

$f(i, n) = n + 1$, $g(i, n) = n$ și tripletele de aplicații $\chi' = (t', u', v')$, $\chi'' = (t'', u'', v'')$, unde

$$t'(i) = t''(i) = i_1$$
$$u'(n) = f_1(s', i_1^{n-1}), \quad u''(n) = f_1(s'', i_1^{n-1})$$
$$v'(n) = g_1(s', i_1^{n-1}), \quad v''(n) = g_1(s'', i_1^{n-1}),$$

unde $i_1^r = \underbrace{i_1 \ldots i_1}_{r}$, iar $i_i^0 = e$.

Să arătăm că χ' și χ'' sînt morfisme. Într-adevăr, diagramele:

$$\begin{array}{ccc} I_1 \times S_1 & \xrightarrow{f_1} & \mathcal{P}^*(S_1) \\ {\scriptstyle (t', u')}\uparrow & & \uparrow{\scriptstyle u'} \\ I \times N & \xrightarrow[f]{} & N \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} I_1 \times S_1 & \xrightarrow{g_1} & \mathcal{P}^*(O_1) \\ {\scriptstyle (t', u')}\uparrow & & \uparrow{\scriptstyle v'} \\ I \times N & \xrightarrow[g]{} & N \end{array}$$

sînt comutative, deci χ' este un morfism de automate. Analog se arată că χ'' este un morfism de automate.

Cum $u'(o) \neq u''(o)$ avem $\chi' \neq \chi''$, dar $\chi\chi' = \chi\chi''$, ceea ce contrazice presupunerea că χ este monomorfism.

Monomorfismul χ în **Autf** nu este în general monomorfism în **Aut**. De aceea injectivitatea aplicației u trebuie demonstrată în cazul finit pe altă cale, deoarece în demonstrația precedentă automatul A nu era finit.

Fie deci $\chi : A_1 \to A_2$ un homomorfism de automate finite. Există numerele $0 \leqslant a_j < b_j$, $j = 1, 2$, astfel ca s', $f_1(s', i_1), \ldots, f_1(s', i_1^{b_1-1})$ și respectiv s'', $f_1(s'', i_1), \ldots, f_1(s'', i_1^{b_1-1})$ să fie distincte două cîte două și $f_1(s', i_1^{b_1}) = f_1(s', i_1^{a_1})$ și $f_1(s'', i_1^{b_1}) = f_1(s'', i_1^{a_1})$.

Remarcăm că $b_j - a_j$, $j = 1, 2$ sînt de fapt lungimile ciclilor de stări care se produc prin aplicarea în mod constant a intrării i_1, atunci cînd funcționarea automatului începe cu starea s' respectiv s''.

Fie $m = \max(a_1, a_2)$ și $n = m + r$, unde r este un multiplu comun al numerelor $b_1 - a_1$ și $b_2 - a_2$.

Automatul $A = [I, S, O, f, g]$ unde $I = \{i_0\}$, $S = O = \{1, 2, \ldots, n\}$ și

$$f(l, i_0) = \begin{cases} l + 1, & \text{dacă } l < n \\ m + 1, & \text{dacă } l = n, \end{cases}$$

$$g(l, i_0) = l, \; l = \overline{1, n}$$

și morfismele χ', χ'' definite anterior, $\chi' \neq \chi''$ au proprietatea $\chi\chi' = \chi\chi''$. În sfîrșit dacă t n-ar fi injectivă ar exista $i', i'' \in I_1$, $i' \neq i''$, $t(i') = t(i'')$ și cum $u(f_1(s, i')) = f_2(u(s), t(i')) = f_2(u(s), t(i'')) = u(f_1(s, i''))$ și din injec-

tivitatea lui u rezultă $f_1(s, i') = f_1(s, i'')$. Analog se arată că $g_1(s, i') = g_1(s, i'')$. Putem defini atunci automatul $A = [\{i\}, S_1, O, f_1, g_1]$ cu:

$$f(s, i) = f_1(s, i') = f_1(s, i''),$$

$$g(s, i) = g_1(s, i') = g_1(s, i'').$$

Se constată imediat că pentru morfismele $\chi' = (t, 1_{S_1}, 1_{O_1})$, $\chi'' = (t'', 1_{S_1}, 1_{O_1})$, unde $t'(i) = i'$ și $t''(i) = i''$ avem $\chi' \neq \chi''$ și $\chi\chi' = \chi\chi''$. ■

Teorema II.7.3. [*Căzănescu V. E.* [1]]. *Morfismul* $\chi : A_1 \to A_2$, $\chi = (t, u, v)$ *este epimorfism în* **Aut** *dacă și numai dacă aplicațiile* t, u, v *sînt surjective.*

Demonstrație. Condiția este suficientă. Să presupunem că aplicațiile t, u, v sînt surjective, dar că χ nu este epimorfism. Există automatul A și morfismele $\chi' : A_2 \to A$, $\chi'' : A_2 \to A$ $\chi' \neq \chi''$, $\chi'\chi = \chi''\chi$

$$A_1 \xrightarrow{\chi} A_2 \underset{\chi''}{\overset{\chi'}{\rightrightarrows}} A,$$

ceea ce echivalează cu valabilitatea cel puțin a uneia din inegalitățile $t' \neq t''$, $u' \neq u''$, $v' \neq v''$, unde $\chi' = (t', u', v')$, $\chi'' = (t'', u'', v'')$.

Dacă $t' \neq t''$ există un $i_2 \in I_2$ astfel ca $t'(i_2) \neq t''(i_2)$. Deoarece t este o surjecție există $i_1 \in I_1$, $i_2 = t(i_1)$, de unde $t'(t(i_1)) \neq t''(t(i_1))$, ceea ce revine la $t't \neq t''t$, adică $\chi'\chi \neq \chi''\chi$, contrar presupunerii făcute. Similar se tratează și celelalte cazuri.

Condiția este necesară. Să presupunem că χ este epimorfism și să arătăm că aplicațiile t, u, v sînt surjective.

Dacă t n-are fi aplicație surjectivă ar exista $I_0 \subseteq I_2$, $I_0 \neq \emptyset$, $I_0 \cup t(I_1) = I_2$, $I_0 \cap t(I_1) = \emptyset$. Considerăm automatul $A = [I, S, O, f, g]$ unde $I = \{1, 2\}$. $S = \{s\}$, $O = \{o\}$, $f(s, j) = s$, $g(s, j) = o$, $j = 1, 2$, și morfismele χ', $\chi'' : A_2 \to A$ definite prin

$$t'(i_2) = \begin{cases} 1, & \text{dacă } i_2 \in t(I_1) \\ 2, & \text{dacă } i_2 \in I_0, \end{cases}$$

$$t''(i_2) = 1, \quad \forall i_2 \in I_2,$$

$$u'(s_2) = u''(s_2) = s, \quad \forall s_2 \in S_2,$$

$$v'(o_2) = v''(o_2) = o, \quad \forall o_2 \in O_2.$$

Rezultă că $\chi' \neq \chi''$, dar $\chi'\chi = \chi''\chi$ ceea ce contrazice faptul că χ este epimorfism.

Dacă acum u nu este aplicație surjectivă există $S_0 \neq \varnothing$, $S_0 \cup u(S_1) = S_2$, $S_0 \cap u(S_1) = \varnothing$. Se consideră automatul $A = [I, S, O, f, g]$ unde $I = I_2$, $S = \{s_0\} \cup S_0$, $s_0 \notin S_0$, $O = \{o\}$ și

$$f(s, i_2) = \begin{cases} s_0, & \text{dacă } s = s_0 \\ s_0, & \text{dacă } f_2(s, i_2) \in u(S_1), \quad s \in S_0 \\ f_2(s, i_2), & \text{dacă } f_2(s, i_2) \in S_0, \quad s \in S_0, \end{cases}$$

iar $g(s, i_2) = o$ și morfismele $\chi', \chi'' : A_2 \to A$, unde $\chi' = (1_{I_2}, u', v')$, $\chi'' = (1_{I_2}, u'', v'')$.

Aici

$$u'(s_2) = s_0, \quad v'(o_2) = v''(o_2) = o$$

și

$$u''(s_2) = \begin{cases} s_0, & \text{dacă } s_2 \in u(S_1) \\ s, & \text{dacă } s_2 \in S_0. \end{cases}$$

Rezultă $\chi' \neq \chi''$, dar $\chi'\chi = \chi''\chi$.

În sfîrșit, dacă v n-ar fi surjectiv ar rezulta existența unei mulțimi $O_0 \neq \varnothing$ cu $O_0 \subseteq O_2$, $v(O_1) \cup O_0 = O_2$, $v(O_1) \cap O_0 = \varnothing$. Considerăm automatul $A = [I, S, O, f, g]$ unde $I = \{i\}$, $S = \{s\}$, $O = \{1, 2\}$, $f(s, i) = s$, $g(s, i) = 1$ și morfismele $\chi' = (t', u', v')$, $\chi'' = (t'', u'', v'')$, $\chi', \chi'' : A_2 \to A$ unde:

$$t'(i_2) = t''(i_2) = i,$$

$$u'(s_2) = u''(s_2) = s,$$

$$v'(o_2) = 1,$$

$$v''(o_2) = \begin{cases} 1 & \text{dacă } o_2 \in v(O_1) \\ 2 & \text{dacă } o_2 \in O_0. \end{cases}$$

Rezultă $\chi'' \neq \chi'$, dar $\chi'\chi = \chi''\chi$. ■

Teorema II.7.4. *Morfismul $\chi : A_1 \to A_2$, $\chi = (t, u, v)$ este un izomorfism dacă și numai dacă aplicațiile t, u, v sînt bijecții.*

Demonstrație. Dacă χ este un izomorfism în **Aut** atunci este bijecție, iar aplicațiile t, u, v sînt bijecții.

Reciproc, dacă aplicațiile t, u, v sînt bijecții, morfismul $\chi' = (t^{-1}, u^{-1}, v^{-1})$, $\chi' : A_2 \to A_1$ are proprietatea $\chi'\chi = 1_{A_1}$, $\chi\chi' = 1_{A_2}$, adică χ este izomorfism. ■

Consecința II.7.1. Orice bijecție în **Aut** este izomorfism.

Definiția II.7.4. Fie $\chi = (t, u, v)$, $\chi: A_1 \to A_2$ un izomorfism. χ este un *S-izomorfism* dacă $t = 1_I$, $v = 1_O$. Analog se definesc X-izomorfismele unde $X \in \mathcal{P}^*(\{S, I, O\})$.

Teorema II.7.5. [*Căzănescu V.E.* [1]]. *În* **Aut** *orice sistem proiectiv are cel puțin o limită proiectivă.*

Demonstrație. Fie $\{\{A\}_{j\in J}, \{\chi_{jk}\}_{j,k\in J}\}$ un sistem proiectiv în **Aut**: $A_j = [I_j, S_j, O_j, f_j, g_j]$, iar $\chi_{jk} = (t_{jk}, u_{jk}, v_{jk})$, $j \leqslant k$. Vom arăta că o limită proiectivă a sistemului este automatul $A = [I, S, O, f, g]$, unde

$$I = \{\{u_j\}_{j\in J} \mid i_j \in I_j, \quad t_{jk}(i_k) = i_j\},$$

$$S = \{\{s_j\}_{j\in J} \mid s_j \in S_j, \quad u_{jk}(s_k) = s_j\},$$

$$O = \{\{o_j\}_{j\in J} \mid o_j \in O_j, \quad v_{jk}(o_k) = o_j\}$$

$$f(\{s_j\}_{j\in J}, \{i_j\}_{j\in J}) = \{f_j(s_j, i_j)\}_{j\in J},$$

$$g(\{s_j\}_{j\in J}, \{i_j\}_{j\in J}) = \{g_j(s_j, i_j)\}_{j\in J},$$

împreună cu morfismele $\chi_j = (t_j, u_j, v_j)$, $\chi_j: A \to A_j$ unde

$$t_j(\{i_k\}_{k\in J}) = i_j,$$

$$u_j(\{s_k\}_{k\in J}) = s_j,$$

$$v_j(\{o_k\}_{k\in J}) = o_j, \quad \forall_{j\in J}.$$

Se verifică imediat că $\chi_{jk}\chi_k = \chi_j$, $\forall j, k \in J$ cu $j \leqslant k$.

Dacă există automatul A' și morfismele $\chi'_j: A' \to A_j$ astfel ca $\chi_{jk}\chi'_k = \chi'_j$, $\forall j, k \in J$ și $j \leqslant k$, atunci morfismul $\chi = (t, u, v)$, $\chi: A' \to A$, unde $t(i') = \{t'_j(i')\}_{j\in J}$, $u(s') = \{u'_j(s')\}_{j\in J}$, $v(o) = \{v'_j(o)\}_{j\in J}$, verifică egalitatea $\chi_j\chi = \chi'_j$, $\forall j \in J$ și este unicul cu această proprietate. Deci $(A, \chi_j) = \varprojlim_{j\in J}(A_j, \chi_{jk})$. ■

Alte proprietăți ale categoriei **Aut** pot fi găsite în [Căzănescu, V. E. [1]].

Legătura dintre automatele deterministe și automatele lor reduse este dată de

Teorema II.7.6. *Oricare ar fi* $A \in$ **Autd** *și* A' *un redus al său există un morfism* $\chi: A \to A'$, *unde* $\chi = (1_I, h, 1_O)$. *Oricare două automate reduse ale unui automat* A *sînt S-izomorfe în* **Autd**.

Demonstrație. Fie A_1, A_2 două automate reduse ale automatului A. Conform demonstrației teoremei II.6.3 există aplicațiile $h: S_2 \to S_1$, $k: S_1 \to S_2$ care fac comutativă diagrama (II.6.5).

Rămîne să arătăm că aceleași aplicații fac comutative diagramele:

(II.7.3)
$$\begin{array}{ccc} S_1 & \xrightarrow{f_{1p}} & S_1 \\ {\scriptstyle k}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle k} \\ S_2 & \xrightarrow[f_{2p}]{} & S_2 \end{array}$$

(II.7.4)
$$\begin{array}{ccc} S_2 & \xrightarrow{f_{2p}} & S_2 \\ {\scriptstyle k}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle k} \\ S_1 & \xrightarrow[f_{1p}]{} & S_1 \end{array}$$

Într-adevăr, din $g_{1pq} = g_{2pq}k$ (vezi diagrama (II.6.5)), urmează $g_{1q}f_{1p} = g_{2q}f_{2p}k$.

În baza aceleiași diagrame (II.6.5) obținem $g_{2q}kf_{2p} = g_{2q}f_{2p}k$. Automatele A_1 și A_2 fiind reduse familiile de aplicații $\{g_{1p}\}_{p\in I^*}$, $\{g_{2p}\}_{p\in I^*}$ sînt injective deci $kf_{1p} = f_{2q}k$, adică diagrama (II.7.3) este comutativă.

La fel se arată că diagrama (II.7.4) este comutativă și deci automatele reduse A_1 și A_2 sînt S-izomorfe.

Fie acum A/ρ automatul redus canonic. Tripletul $(1_I, h, 1_O)$ unde h este aplicația din diagrama (II.6.3) este un S-homomorfism între A și A/ρ. Mai rezultă că automatul A este S-homomorf cu oricare din automatele sale reduse, deoarece orice redus al lui A este S-izomorf cu A/ρ. ■

Vom descrie un mod de a construi un automat redus $\breve{A}$ al unui automat determinist A, $\breve{A} \cong A/\rho$.

Teorema II.7.7. *Fie automatul* $A = [I, S, O, f, g]$. *Automatul* $\breve{A} = [I, \breve{S}, O, \breve{f}, \breve{g}]$, *unde* $\breve{S} = \{k \mid k: I^* \to O, \exists s\in S, k = g_s\}$ *și* $\breve{f}(k, i) = k_1$, *unde* $k_1(p) = k(ip)$, *iar* $\breve{g}(k, i) = k(i)$ *este un redus al lui* A.

Demonstrație. Să observăm în prealabil că funcțiile $\breve{f}:\breve{S}\times I \to \breve{S}$ și $g:\breve{S}\times I \to O$ pot fi extinse la $\breve{S}\times I^*$ în mod natural, adică $\breve{f}(k, q) = k_1$, unde $k_1(p) = k(qp)$ și $\breve{g}(k, q) = k(q)$.

Dacă $k = g_s$, $\breve{f}(k, p) = f(\breve{g}_s, p) = g_{f(s,p)}$ și $\breve{g}(k, p) = \breve{g}(g_s, p) = g(s, p)$.

Automatul $\breve{A}$ este redus. Fie $k_1, k_2, \in \breve{S}$ și $(k_1, k_2)\in\rho$. Avem $\breve{g}(k_1, p) = \breve{g}(k_2, p)$, $\forall p\in I^*$, ceea ce revine la $g(s_1, p) = g(s_2, p)$, $\forall p\in I^*$, adică $g_{s_1}(p) = g_{s_2}(p)$ $\forall p\in I^*$, deci $k_1 = k_2$. Aici am presupus $k_1 = g_{s_1}$ și $k_2 = g_{s_2}$.

Echivalența automatelor A și $\breve{A}$ rezultă din $(s, g_s)\in\rho$, $\forall s\in S$.

Dacă automatul A este redus automatele A și $\breve{A}$ sînt izomorfe. ■

Observația II.7.3. În cazul automatelor nedeterministe pentru a avea un S-homomorfism $\chi : A \to A/\rho$ este necesar și suficient ca diagrama:

(II.7.5)
$$\begin{array}{ccc} S/\rho & \xrightarrow{f_{\rho p}} & \mathcal{P}^*(\mathcal{P}^*(S)) \\ {\scriptstyle k}\downarrow & & \uparrow{\scriptstyle k} \\ S & \xrightarrow[f_p]{} & \mathcal{P}^*(S) \end{array}$$

să fie comutativă, avînd în vedere comutativitatea diagramei (II.6.3).

Următorul exemplu ne asigură că nu pentru orice automat nedeterminist diagrama (II.7.5) este comutativă.

Exemplul II.7.1. Fie $A = [\{i\}, \{s_1, s_2, s_3, s_4\}, \{0, 1\}, f, g]$ unde:

f	s_1	s_2	s_3	s_4
i	$\{s_1, s_2, s_3, s_4\}$	$\{s_1, s_2, s_4\}$	$\{s_4\}$	$\{s_4\}$

g	s_1	s_2	s_3	s_4
i	$\{0\}$	$\{0\}$	$\{1\}$	$\{0, 1\}$

Se constată imediat că $A/\rho = [\{i\}, \{\{s_1, s_2\}, \{s_3\}, \{s_4\}\}, \{0, 1\}, f_\rho, g_\rho]$ unde:

f_ρ	$\{s_1, s_2\}$	$\{s_3\}$	$\{s_4\}$
i	$\{\{s_1, s_2\}, \{s_3\}, \{s_4\}\}$	$\{s_4\}$	$\{s_4\}$

g_ρ	$\{s_1, s_2\}$	$\{s_3\}$	$\{s_4\}$
i	$\{0\}$	$\{1\}$	$\{0, 1\}$

și definim aplicația $h : S \to S/\rho$ prin

$$h(s_1) = h(s_2) = \{s_1, s_2\},$$
$$h(s_3) = \{s_3\},$$
$$h(s_4) = \{s_4\}.$$

Într-adevăr

$$f_{\rho i}(h(s_2)) = \{\{s_1, s_2\}, \{s_3\}, \{s_4\}\} \neq \{\{s_1, s_2\}, \{s_4\}\} = h(f_i(s_2)).$$

Conchidem că nu orice automat nedeterminist este S-homomorf cu un redus al său.

Vom studia acum unele proprietăți ale automatelor păstrate prin diverse tipuri de homomorfisme în **Autd.**

Teorema II.7.8. [*Bavel și Muller* [2]]. *Fie $\chi : A_1 \to A_2$ un epimorfism $\chi = (t, u, v)$. Proprietățile de semirestabilire, restabilire, surjecție, reversibilitate și conexiune tare se păstrează prin χ.*

Demonstrație. Să presupunem că automatul A_1 are proprietatea de semirestabilire. Atunci $\forall s_1 \in f(S, i_1)$, $\exists p \in I_1^*$ astfel ca $s_1 = f(s_1, pi)$. Prin homomorfismul χ obținem că pentru orice $u(s_1) \in f(u(S_1), t(i_1))$, $\exists q = t(p) \in I_2^*$ astfel ca $u(s_1) = f_2(u(s_1), t(pi))$. χ fiind epimorfism aplicațiile u și t sînt surjective

și deci $\forall s_2 \in f(S_2, i_2)$, $\exists s_1 \in f(S_1, i)$ astfel ca $s_2 = u(s_1)$ și $\forall i_2 \in I_2$, $\exists i_1 \in I_1$ ca $t(i_1) = i_2$. În plus $u(S_1) = S_2$.

Demonstrarea invarianței prin epimorfism pentru celelalte proprietăți se face în mod analog. ■

Consecința II.7.2. Dacă automatul A este conex de starea s_0 (vezi definiția II.4.4) imaginea sa epimorfă este conexă de starea $u(s_0)$, iar dacă starea s este accesibilă din starea s_0 (vezi definiția II.4.2) atunci în automatul $\chi(A)$ starea $u(s)$ este accesibilă din starea $u(s_0)$.

Teorema II.7.9. *Proprietățile de predecesor unic, reversibilitatea parțială și reversibilitatea potențială nu sînt păstrate prin homomorfisme.*

Demonstrație. Este suficient să găsim un automat cu proprietățile din enunț, dar a cărui imagine homomorfă nu posedă aceste proprietăți.

Fie

$$A_1 = \left[\{i, i'_j, i''_j\}_{j \in N^*}, \quad \left\{\frac{m}{2^n}\right\}_{\substack{m \in Z \\ n \in N^*}}, O_1, f_1, g_1\right],$$

cu

$$f_1(s_1, i) = 2s_1, f_1(s_1, i'_j) = s_1 + \frac{1}{2^j}, \quad f_1(s_1, i''_j) = s_1 - \frac{1}{2^j}, \quad j \in N^*,$$

$$\forall s_1 \in S_1 \quad \text{și} \quad A_2 = \left[\{i, i'_j, i''_j\}_{j \in N^*}, \left\{\frac{m}{2^n} - \left[\frac{m}{2^n}\right]\right\}_{\substack{m \in Z \\ n \in N^*}}, O_1, f_2, g_2\right]$$

cu

$$f_2(s_2, i) = 2s_2 - [2s_2], f_2(s_2, i'_j) = s_2 + \frac{1}{2^m} - \left[s_2 + \frac{1}{2^m}\right],$$

$$f_2(s_2, i''_j) = s_2 - \frac{1}{2^m} - \left[s_2 - \frac{1}{[2^m]}\right].$$

Deoarece în proprietatea studiată nu intervin funcțiile g_1 și g_2 acestea pot fi alese arbitrar, cu singura condiție de a permite definirea homomorfismului $\chi : A_1 \to A_2$, $\chi = (1_{I_1}, u, 1_{O_1})$, unde $u : S_1 \to S_2$ și $u(s) = s - [s]$.

Se constată imediat (vezi exemplul II.4.12) că automatul A posedă proprietatea de predecesor unic, reversibilitate parțială și reversibilitate potențială.

Deoarece $f_2\left(\frac{1}{2}, i\right) = 1 - [1] = 0$ și $f_2(0, i) = 0 - [0] = 0$,

automatul A_2 nu posedă proprietatea de predecesor unic. Dar, atît proprietatea de reversibilitate parțială, cît și cea de reversibilitate potențială implică proprietatea de unic predecesor (vezi teorema II.4.2) deci automatul A_2 nu posedă nici una din aceste proprietăți. ■

Ne vom ocupa acum de cazul special al semiautomatelor deterministe.

Să observăm că un semiautomat determinist $A = [I, S, f]$ poate fi conceput ca un automat determinist $A = [I, S, S, f, f]$. Apare astfel în mod natural:

Definiția II.7.5. Un homomorfism între semiautomatele $A_j = [I_j, S_j, f_j]$, $j = 1, 2$ este o pereche de aplicații $\chi = (t, u)$ $t : I_1 \to I_2$, $u : S_1 \to S_2$ care fac comutativă diagrama:

(II.7.6)
$$\begin{array}{ccc} S_1 \times I_1 & \xrightarrow{\quad f_1 \quad} & S_1 \\ {\scriptstyle (u,t)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle u} \\ S_2 \times I_2 & \xrightarrow[\quad f_2 \quad]{} & S_2 \end{array}$$

Clasa semiautomatelor deterministe formează o categorie **Sautd** având ca obiecte semiautomatele deterministe și ca morfisme homomorfismele introduse în definiția II.7.5.

Teorema II.7.10. *Morfismul $\chi = (t, u) : A_1 \to A_2$ este monomorfism (epimorfism) dacă și numai dacă aplicațiile t și u sînt injective (surjective. χ este izomorfism dacă și numai dacă aplicațiile t și u sînt bijecții.*

Demonstrație. Se procedează la fel ca în teoremele II.7.2—4. ■

Definiția II.7.6. *Relația de echivalență atașată unui semiautomat A inițial* $A = [I, S, f; s_0]$ este relația $\rho_A \subseteq I^* \times I^*$ definită prin

$$\rho_A = \ker f_{s_0}.$$

Observația II.7.4. Relația ρ_A este o congruență la dreapta.

Într-adevăr, după $(p, q) \in \rho_A$, $f_{s_0}(p) = f_{s_0}(q)$ sau $f(s_0, p) = f(s_0, q)$. Atunci $f(s_0, pr) = f(f(s_0, p), r) = f(f(s_0, q), r) = f(s_0, qr)$, deci $(pr, qr) \in \rho_A$.

Pornind acum de la o relație de congruență la dreapta pe I^* vom construi un semiautomat prin

Definiția II.7.7. *Semiautomatul atașat congruenței la dreapta* ρ este semiautomatul inițial $A_\rho = [I, I^*/\rho, f_\rho; [e]]$ unde $f_\rho([p], i) = [pi]$.

Fie $A = [I, S, f; s_0]$ un semiautomat inițial. *Componenta conexă* a semiautomatului A este semiautomatul $A^c = [I, f(s_0, I^*), f|_{f(s_0, I^*) \times I}; s_0]$

Teorema II.7.11. *Semiautomatele A^c și $A\rho_A$ sînt izomorfe.*

Demonstrație. Perechea $\chi = (1_I, u)$ unde $u : f(s_0, I^*) \to I^*/\rho_A$ este dată prin

$$u(s) = u(f(s, p)) = [p],$$

este un izomorfism între A^c și A_{ρ_A}.

Să observăm că, dacă $s \in f(s_0, q)$, deoarece $f(s_0, p) = f(s_0, q)$, $[p] = [q]$ și deci aplicația u este bine definită. Mai mult, aplicația u este o bijecție și face comutativă diagrama (II.7.6) ■

Teorema II.7.12. *Avem* $\rho_{A_\rho} = \rho$.

Demonstrație. Fie $(p, q) \in \rho_{A_\rho}$. Atunci $f_\rho([e], p) = f_\rho([e], q)$ sau $[p] = [q]$, deci $(p, q) \in \rho$. Reciproca se arată parcurgînd în sens invers raționamentul. ■

Teorema II.7.13. *Dacă* $\rho_2 \leqslant \rho_1$ *și* ρ_1, ρ_2 *sînt congruențe la dreapta pe* I^* *atunci există un epimorfism* $\chi : A_{\rho_2} \to A_{\rho_1}$.

Demonstrație. Epimorfismul χ este pereche $(1_I, u)$, unde $u : I^*/\rho_2 \to I^*/\rho_1$ este definită de:

$$u([p]_2) = [p]_1.$$

Aici $[p]_j \in I^*/\rho_j$, $j = 1, 2$.
Diagrama

$$\begin{array}{ccc} I^*/\rho_2 \times I & \xrightarrow{f_2} & I^*/\rho_2 \\ \downarrow{\scriptstyle (u, 1_I)} & & \downarrow{\scriptstyle u} \\ I^*/\rho_1 \times I & \xrightarrow[f_1]{} & I^*/\rho_1 \end{array}$$

este comutativă, deoarece $u(f_2([p]_2, i)) = u([pi]_2) = [pi]_1 = f_1([p]_1, i) = f_1(u([p]_2), i)$ ■

Teorema II.7.14. *Dacă există un epimorfism* $A_2 \to A_1$, *atunci avem* $\rho_{A_2} \leqslant \rho_{A_1}$, A_1 *și* A_2 *fiind semiautomate conexe de starea inițială.*

Demonstrație. Rezultă imediat din teoremele II.7.11 și II.7.13. ■

Consecința II.7.3. $\rho_{A_1} = \rho_{A_2}$ dacă semiautomatele conexe de starea inițială sînt izomorfe.

Vom introduce o relație de ordonare structurală a semiautomatelor.

Definiția II.7.8. Semiautomatele inițiale A_1, A_2 sînt în *relația de ordonare structurală* $A_1 \prec A_2$ dacă există un epimorfism de semiautomate $\chi : A_1^c \to A_2^c$. Dacă χ este izomorfism atunci se spune că A_1 și A_2 sînt *structural echivalente.*

Definiția II.7.9. Mulțimea semiautomatelor izomorfe cu semiautomatul inițial A formează *tipul de structură* al lui A, $\langle A \rangle$, sau pe scurt, *tipul* lui A.

Definiția II.7.10. *Semiautomatul* A_2 *simulează semiautomatul* A_1, $A_1 | A_2$ dacă există perechea de aplicații $\Phi = (t, z)$ unde $t : I_1 \to I_2$, $z : S_1 \to S_2$ care face comutativă diagrama:

$$\begin{array}{ccc} I_1^* & \xrightarrow{g_{1s_1}} & S_1 \\ \downarrow{\scriptstyle t} & & \downarrow{\scriptstyle z} \\ I_2^* & \xrightarrow[g_{2z(s_1)}]{} & S_2 \end{array}$$

§ II.8. OPERAȚII CU AUTOMATE ȘI LATICEA SEMIAUTOMATELOR

În acest paragraf ne vom ocupa de unele procedee de construire a noi automate pornind de la o mulțime de automate date și anume ne vom ocupa de gruparea în cascadă a automatelor și de niște operații particulare care se pot deduce din aceasta (gruparea în serie și în paralel) precum și de operațiile de sumă și produs direct. În sfîrșit vom arăta că mulțimea tipurilor de semiautomate inițiale poate fi organizată ca o latice.

Definiția II.8.1. Fie I_0 o mulțime nevidă, $A_j = [I_j, S_j, O_j, f_j, g_j]$, $j = 1, 2$ două automate deterministe și aplicațiile $\xi : I_0 \times O_1 \to I_2$ și $\eta : I_0 \to I_1$. *Cascada automatelor* A_1 și A_2 *prin aplicațiile* ξ și η este automatul

$$A_2 \times_{(\xi, \eta)} A_1 = [I_0, S_2 \times S_1, O_2 \times O_1, f_{(\xi, \eta)}, g_{(\xi, \eta)}]$$

unde:

$$f_{(\xi, \eta)}((s_2, s_1), i_0) = (f_2(s_2, \xi(i_0, g_1(s_1, \eta(i_0)))), f_1(s_1, \eta(i_0)))$$

$$g_{(\xi, \eta)}((s_2, s_1), i_0) = (g_2(s_2, \xi(i_0, g_1(s_1, \eta(i_0)))), g_1(s_1, \eta(i_0))).$$

Construcția automatului $A_2 \times_{(\xi, \eta)} A_1$ este clarificată de fig. II.8.1.

Observația II.8.1. Operația binară de grupare în cascadă depinde esențial de aplicațiile ξ și η și ea poate fi extinsă la orice număr finit de automate

Observația II.8.2. În cazul în care aplicația ξ nu depinde de prima variabilă obținem *gruparea în serie* a automatelor A_1 și A_2, iar dacă ξ nu depinde de a doua variabilă obținem *gruparea în paralel* a automatelor.

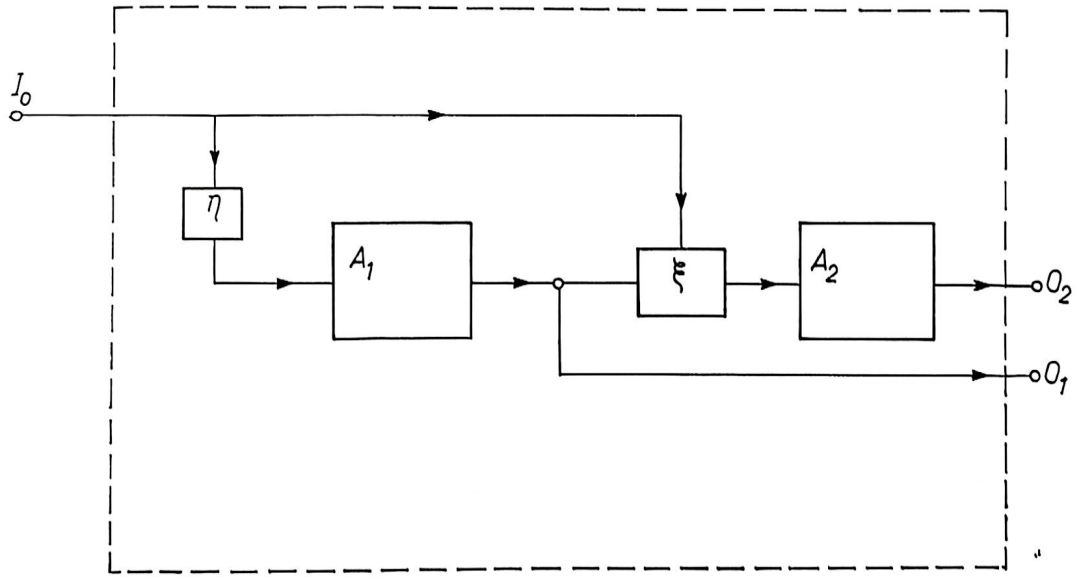


Fig. II. 8.1

Pentru $\eta = 1_{I_0}$ (deci $I_0 = I_1$) și $\xi(i_0, o_1) = o_1$ (deci $O_1 = I_2$) obținem *gruparea în serie în sens Hartmanis-Stearns* [9] notată cu $A_1 \to A_2 = [I_1, S_2 \times S_1, O_2, \vec{f}, \vec{g}]$, unde

$$\vec{f}((s_2, s_1), i_1) = (f_2(s_2, g_1(s_1, i_1)), f_1(s_1, i_1)),$$

$$\vec{g}((s_2, s_1), i_1) = g_2(s_2, g_1(s_1, i_1)).$$

Dacă $\mathrm{pr}_1 \xi = 1_{I_0}$ (deci $I_0 = I_2$) și $\eta = 1_{I_0}$ (deci $I_0 = I_1$) obținem *gruparea în paralel în sens Hartmanis-Stearns* [9] notată cu $A_1 || A_2 = [I_0, S_2 \times S_1, O_2 \times O_1, \overline{\overline{f}}, \overline{\overline{g}}]$ unde

$$\overline{\overline{f}}((s_2, s_1), i_0) = (f_2(s_2, i_0), f_1(s_1, i_0)),$$

$$\overline{\overline{g}}((s_2, s_1), i_0) = (g_2(s_2, i_0), g_1(s_1, i_0)).$$

Definiția II.8.2. Fie $A_j = [I_j, S_j, O_j, f_j, g_j], j = 1, 2$. Presupunînd $I_1 = I_2 = I$, $S_1 \cap S_2 = \varnothing$, *suma directă a automatelor* A_1 și A_2 este automatul $A_1 \oplus A_2 = [I, S_1 \cup S_2, O_1 \cup O_2, f_1 \oplus f_2, g_1 \oplus g_2]$ unde

$$f_1 \oplus f_2(s, i) = \begin{cases} f_1(s, i), & \text{dacă } s \in S_1 \\ f_2(s, i), & \text{dacă } s \in S_2, \end{cases}$$

iar

$$g_1 \oplus g_2(s, i) = \begin{cases} g_1(s, i), & \text{dacă } s \in S_1 \\ g_2(s, i), & \text{dacă } s \in S_2. \end{cases}$$

Observația II.8.3. Presupunerea $S_1 \cap S_2 = \varnothing$ nu este o restrîngere a generalității deoarece, în locul reuniunii $S_1 \cup S_2$ putem utiliza reuniunea disjunctă $S_1 \cup' S_2$.

Teorema II.8.1. *A_1 și A_2 sînt subautomate ale automatului $A_1 \oplus A_2$, $A_1 \oplus A_2 > A_1$, $A_1 \oplus A_2 > A_2$. Pentru $s_j \in S_j$, $|S_j| = n_j$, $j = 1, 2$, avem $(s_1, s_2) \in \rho_\oplus$ dacă și numai dacă $(g_1 \oplus g_2)_p(s_1) = (g_1 \oplus g_2)_p(s_2)$ pentru orice $p \in I^*$, cu $l(p) \leqslant n_1 + n_2 - 1$ dacă automatele A_1 și A_2 sînt deterministe. În cazul în care A_1 și A_2 sînt nedeterministe, două mulțimi de stări $S_1' \subseteq S_1$, $S_2' \subseteq S_2$ sînt semiseparabile dacă există $p \in I^*$ cu $l(p) \leqslant 2^{n_1+n_2-2}$ astfel ca $(g_1 \oplus g_2)_p(S_1') \neq (g_1 \oplus g_2)_p(S_2')$. Aici $\rho_\oplus$ este relația de echivalență în automatul $A_1 \oplus A_2$.*

Demonstrația este evidentă; pentru ultima parte vezi și teoremele II.5.5 și II.5.7. ■

Definiția II.8.3. Fie $A_j = [I_j, S_j, O_j, f_j, g_j], j = 1, 2$. Presupunînd $I_1 = I_2 = I$ *produsul direct* al automatelor A_1 și A_2 este automatul

$$A_1 \times A_2 = [I, S_1 \times S_2, O_1 \times O_2, f_1 \times f_2, g_1 \times g_2],$$

unde

$$f_1 \times f_2((s_1, s_2), i) = (f_1(s_1, i), f_2(s_2, i)),$$

$$g_1 \times g_2((s_1, s_2), i) = (g_1(s_1, i), g_2(s_2, i)).$$

Observația II.8.4. Funcțiile $f_1 \times f_2$, $g_1 \times g_2$ se extind în mod natural punînd

$$f_1 \times f_2((s_1, s_2), p) = (f_1(s_1, p), f_2(s_2, p)),$$

$$g_1 \times g_2((s_1, s_2), p) = (g_1(s_1, p), g_2(s_2, p)).$$

Observația II.8.5. Definiția sumei și produsului direct de semiautomate se face în mod natural utilizînd definițiile II.8.2—3.

O altă operație între semiautomate este produsul Huzino dat în:

Definiția II.8.4. Fie $A_j = [I, S, f_j]$, $j = 1, 2$ două semiautomate cu același alfabet de intrare și aceeași mulțime de stări. *Produsul Huzino* al semiautomatelor A_1 și A_2 este semiautomatul $A = [I, S, f]$ unde $f(s, i) = f_2(f_1(s, i), i)$.

Considerațiile pe care le vom dezvolta în continuare au drept scop organizarea mulțimii tipurilor de semiautomate inițiale, ca o latice.

Mulțimea tipurilor de semiautomate inițiale (vezi definiția II.7.9) poate fi dotată cu o relație de ordine parțială. Astfel, tipul $\langle A_1 \rangle$ precede tipul $\langle A_2 \rangle$, $\langle A_1 \rangle < \langle A_2 \rangle$ dacă există un epimorfism $\chi : A_1 \to A_2$.

Lăsăm în grija cititorului verificarea bunei definiri a acestei relații.

Teorema II.8.2. *Mulțimea parțial ordonată* $(\widetilde{\mathrm{Eqd}}(I^*), \subseteq)$ *este izomorfă cu mulțimea parțial ordonată a tipurilor de semiautomate inițiale pe alfabetul* I, $(\mathcal{T}(I), <)$.

Demonstrație. Aplicația $\zeta : \widetilde{\mathrm{Eqd}}(I^*) \to \mathcal{T}(I)$ definită prin $\zeta(\rho) = \langle A_\rho \rangle$ este un izomorfism de mulțimi parțial ordonate.

Faptul că ζ este un homomorfism rezultă din teorema II.7.13, iar proprietatea de izomorfism rezultă din teorema II.7.12 și consecința II.7.3. ■

Deoarece mulțimea parțial ordonată $(\widetilde{\mathrm{Eqd}}(I^*), \subseteq)$ este o latice $(\widetilde{\mathrm{Eqd}}(I^*), \vee, \wedge)$, teorema II.8.2 permite să inducem pe mulțimea tipurilor de semiautomate o structură de latice.

Teorema II.8.3. *Mulțimea* $(\mathcal{T}(I), \vee, \wedge)$ *formează o latice, unde*

$$\langle A_1 \rangle \vee \langle A_2 \rangle = \langle A_{\rho_{A_1} \vee \rho_{A_2}} \rangle,$$

$$\langle A_1 \rangle \wedge \langle A_2 \rangle = \langle A_{\rho_{A_1} \wedge \rho_{A_2}} \rangle.$$

Demonstrație. Rezultă imediat din teorema II.8.2 ■

Observația II.8.6. Deoarece laticea $(\widetilde{\mathrm{Eqd}}(I^*), \vee, \wedge)$ are prim și ultim element (ι_{I^*} și ω_{I^*} respectiv) laticea $(\mathcal{C}(I), \vee, \wedge)$ are de asemenea prim și ultim element (tipul semiautomatului cu o singură stare și tipul semiautomatului liber * al semigrupului I^*).

Teorema II.8.4. *Avem* $\rho_{A_1 \times A_2} = \rho_{A_1} \wedge \rho_{A_2}$.

Demonstrație. Dacă $(p, q) \in \rho_{A_1 \times A_2}$, atunci $(f_1(s_0^1, p), f_2(s_0^2, p)) = (f_1(s_0^1, q), f_2(s_0^2, q))$ adică $(p, q) \in \rho_{A_1}$ și $(p, q) \in \rho_{A_2}$, deci $\rho_{A_1 \times A_2} \leqslant \rho_{A_1} \wedge \rho_{A_2}$. Incluziunea reciprocă se obține parcurgînd în sens invers raționamentul. ■

Consecința II.8.1. Avem $\langle A_1 \rangle \wedge \langle A_2 \rangle = \langle (A_1 \times A_2)^c \rangle$.

Într-adevăr, $\langle (A_1 \times A_2)^c \rangle = \langle A \rho_{A_1 \times A_2} \rangle = \langle A \rho_{A_1} \wedge \rho_{A_2} \rangle = \langle A_1 \rangle \wedge \langle A_2 \rangle$, conform teoremelor II.7.11, II.8.4 și II.8.3. ■

§ II.9. SEMIGRUPURI ȘI AUTOMATE DETERMINISTE

Vom pune în evidență unele proprietăți ale semigrupurilor care vor permite apoi studiul simulării unor automate prin cascade de automate mai simple (vezi § III.3).

Fie I^* semigrupul liber generat de alfabetul I și $p \in I^*$. Considerăm aplicațiile $R_p : I^* \to I^*$ și $L_p : I^* \to I^*$ definite prin

$$R_p(q) = qp, \qquad L_p(q) = pq, \qquad \forall q \in I^*.$$

Fie aplicația $\varphi : I^* \to O$.

Definiția II.9.1. *Cuvintele* $p, q \in I^*$ *sînt echivalente în sens Nerode* $(p, q) \in \nu^\varphi$ dacă și numai dacă $\varphi L_p = \varphi L_q$; *cuvintele* $p, q \in I^*$ *sînt echivalente în sens Myhill,* $(p, q) \in \mu^\varphi$ dacă și numai dacă pentru orice $r \in I^*$, $\varphi L_r L_p = \varphi L_r L_q$.

În cazul în care nu există pericol de confuzie vom nota, pentru simplitate relațiile ν^φ și μ^φ prin ν, respectiv μ.

Observația II.9.1. Se arată imediat că relațiile introduse mai sus sînt veritabile relații de echivalență. Mai mult, din $(p, q) \in \nu$ urmează $(pr, qr) \in \nu$, $\forall r \in I^*$, iar din $(p, q) \in \mu$ avem $(rp, rq) \in \mu$, $(pr, qr) \in \mu$, $\forall r \in I^*$, adică ν este o congruență la dreapta, iar μ o congruență. Remarcăm că $\mu \leqslant \nu$.

Definiția II.9.2. *Semigrupul atașat aplicației* φ: $I^* \to O$ este semigrupul $W_\varphi = I^*/\mu$.

---

* Semiautomatul liber al semigrupului W este semiautomatul $A(W) = [W, W, f]$, unde $f(p, q) = pq$, $\forall p, q \in W$.

Definiția II.9.3. *Aplicația de condensare alașată aplicației* φ este aplicația $\varkappa_\varphi : W_\varphi \to O$ dată prin $\varkappa_\varphi([p]) = \varphi(p)$.

Funcția $\varkappa_\varphi$ este bine definită. Într-adevăr, dacă $(p, q) \in \mu$ atunci $\forall r, r' \in I^*$, $\varphi(rpr') = \varphi(rqr')$. Luînd $r = r' = e$ găsim $\varphi(p) = \varphi(q)$.

Definiția II.9.4. *Semigrupul* W *divide semigrupul* W' dacă există un subsemigrup W'' al lui W' și un homomorfism surjectiv de semigrupuri h: $W'' \to W$, ceea ce vom scrie pe scurt:

$$W \mid W' \leftrightarrow W' \supseteq W'' \xrightarrow{h} W.$$

Astfel W' poate „modela" înmulțirea pe W prin homomorfismul surjectiv de semigrupuri h.

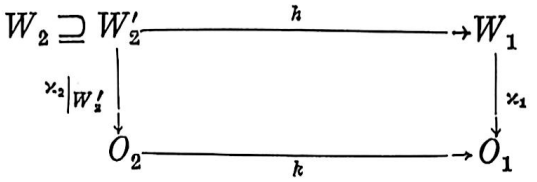
Observația II.9.2. Dacă W_1 este un subsemigrup al semigrupului W atunci $W_1 \mid W$ cu $h = 1_{W_1}$. Dacă $W_1 \mid W_2$ și $W_2 \mid W_3$ atunci $W_1 \mid W_3$, adică relația de divizibilitate între semigrupuri este tranzitivă.

Definiția II.9.5. *Un semigrup condensat* este tripletul $X = (W, O, \varkappa)$ în care W este un semigrup, O este o mulțime nevidă, iar $\varkappa : W \to O$.

Definiția II.9.6. *Semigrupul condensat ataşat aplicației* $\varphi : I^* \to O$ este tripletul $X_\varphi = (W_\varphi, O, \varkappa_\varphi)$ unde $\varkappa_\varphi([p]) = \varphi(p)$.

Definiția II.9.7. *Semigrupul condensat* $X_1 = (W_1, O_1, \varkappa_1)$ *divide semigrupu condensat* $X_2 = (W_2, O_2, \varkappa_2)$ dacă există un subsemigrup $W'_2 \subseteq W_2$, un homomorfism surjectiv $h : W'_2 \to W_1$ și o aplicație $k : O_2 \to O_1$ astfel ca diagrama

(II.9.1)



să fie comutativă.

În continuare vom presupune că grupurile și semigrupurile care apar sînt finite.

Teorema II.9.1. *Fie* G' *un grup și* W *un semigrup astfel ca* $G' \mid W$, *adică există un subsemigrup* W'' *al lui* W *și un homomorfism surjectiv de semigrupuri* h *astfel ca:*

$$W \supseteq W'' \xrightarrow{h} G'.$$

Atunci există un subgrup $G \subseteq W$ *astfel ca* $h(G) = G'$, *adică* $G' \cong G/\ker h$.

Demonstrație. Deoarece W este finit există un subsemigrup W_1 al subsemigrupului W'' astfel ca $h(W_1) = G'$ și W_1 să fie minimal cu această proprietate. Vom arăta că subsemigrupul W_1 este un grup.

Pentru aceasta este suficient să dovedim că W_1 nu conține ideale proprii. Să presupunem că W_2 este un ideal propriu la dreapta în W_1. Deoarece W_2 este un subsemigrup finit el conține cel puțin un element idempotent w_0 (vezi teorema I.12.5). Din $h(w_0^2) = h(w_0)$ urmează $h(w_0) = u_1$, unde u_1 este unitatea grupului G'.

Afirmăm că $h(W_2) = G'$.

Fie $g \in G'$. Există un $w \in W_1$ astfel ca $h(w) = g$. Dar, $g = h(w) = u_1 h(w) = h(w_0)\ h(w) = h(w_0 w) = h(w_2)$. Cum $w_2 \in W_2$ (W_2 fiind ideal la dreapta și $w_0 \in W_2$) urmează că $g' = h(w_2)$.

Din minimalitatea lui W_1 urmează $W_2 = W_1$. Analog se arată că W_1 nu posedă ideale proprii la stînga. ■

Definiția II.9.8. *Produsul semidirect* al *semigrupurilor* W_1 și W_2 prin homomorfismul $h : W_1 \to \text{End } W_2$ (unde End W_2 este monoidul endomorfismelor semigrupului W_2) este semigrupul $W_2 \times_h W_1 = (W_2 \times W_1, \circ)$ unde:

$$(w_2, w_1) \circ (w_2', w_1') = (w_2 h_{w_1}(w_2'), w_1 w_1').$$

Am notat aici $h(w_1)(w_2) = h_{w_1}(w_2)$.

Observația II.9.3. Produsul direct de semigrupuri este produs semidirect prin homomorfismul constant $h(w_1) = 1_{W_2}$, $\forall w_1 \in W_1$.

Fie $F(W_1, W_2) = \{f \mid f : W_1 \to W_2\}$. $F(W_1, W_2)$ poate fi organizat ca un semigrup punînd $(f_1 \circ f_2)(w_1) = f_1(w_1) f_2(w_2)$.

Definiția II.9.9. *Produsul nodal al semigrupurilor* W_1 și W_2 este semigrupul W_1 **wr** W_2* $= F(W_1, W_2) \times_z W_1$, unde $z : W_1 \to \text{End}(F(W_1, W_2))$ este dat de

$$z_{w_1}(f)(w_1') = f(w_1' w_1) = f(R_{w_1}(w_1')),$$

adică $z_{w_1}(f) = f R_{w_1}$.

Definiția II.9.10. *Semigrupul* W este *ireductibil* dacă din $W \mid W_2 \times_h W_1$ rezultă $W \mid W_2$ sau $W \mid W_1$.

Vom pune în evidență o mulțime de semigrupuri ireductibile care vor juca un rol important în cele ce urmează.

Fie U_3 semigrupul $U_3 = \{1, r_0, r_1\}$ a cărui tabelă de înmulțire este:

	1	r_0	r_1
1	1	r_0	r_1
r_0	r_0	r_0	r_1
r_1	r_1	r_0	r_1

și **U** mulțimea subsemigrupurilor care divid pe U_3.

Să observăm că U_3 are subsemigrupurile $U_0 = \{1\}$, $U_2 = \{r_0, r_1\}$, $U_1 = \{1, r_0\} \cong \{1, r_1\}$.

* Notația W_1 **wr** W_2 pentru produsul nodal, consacrată în literatura de specialitate provine de la denumirea „wreath product" în limba engleză.

Teorema II.9.2. *Avem* $\mathbf{U} = (U_0, U_1, U_2, U_3)$.

Demonstrație. În baza observației II.9.2 $\{U_0, U_1, U_2, U_3\} \subseteq \mathbf{U}$.

Fie acum un semigrup W cu proprietatea $W \mid U_3$. Atunci există un subsemigrup al lui U_3, fie el $U_j (j = 0, 1, 2, 3)$ și un homomorfism surjectiv $h : U_j \to W$.

Să arătăm că există $j' \in \{0, 1, 2, 3\}$ astfel ca W să fie izomorf cu $U_{j'}$.

Dacă $U_j = U_0$ atunci $U_{j'} = U_0$, deoarece W este un semigrup cu un singur element.

Dacă $U_j = U_1$ atunci W are sau un element, în care caz este izomorf cu U_0, sau are două elemente și atunci homomorfismul surjectiv h este și injectiv, adică este un izomorfism. Similar se procedează pentru $U_j = U_2$.

În sfîrșit, dacă $U_j = U_3$ atunci pot apare următoarele situații:

a) W are un singur element; atunci $W \cong U_0$.

b) W are două elemente, fie $W = \{w_0, w_1\}$. Se observă că singurele corespondențe esențial distincte sînt $h_1(1) = h_1(r_0) = w_0$, $h_1(r_1) = w_1$ și $h_2(1) = w_0$, $h_2(r_0) = h_2(r_1) = w_2$. Aplicația h_1 nu este un homomorfism. Într-adevăr $h_1(r_1 r_0) = h_1(r_0) = w_0$ și $h_1(r_1)\, h_1(r_0) = w_1 w_0$, deci $w_0 = w_1 w_0$. Pe de altă parte $h_1(r_1 \cdot 1) = h_1(r_1) = w_1$ și $h_1(r_1) \cdot h_1(1) = w_1 w_0$, deci $w_1 w_0 = w_1$, ceea ce arată că h_1 nu este un homomorfism de semigrupuri.

Se constată imediat că h_2 este un homomorfism și că $W = h_2(U_3) \cong U_1$.

c) W are trei elemente; atunci homomorfismul surjectiv h este o injecție și $W \cong U_3$. ■

Teorema II.9.3. *Dacă* $U_j \in \mathbf{U}$ *are proprietatea* $U_j \mid W$ *atunci* U_j *este izomorf cu un subsemigrup al lui* W.

Demonstrație. Fie mai întîi $j = 3$ și să presupunem că $U_3 \mid W$, adică există un subsemigrup $W_1 \subseteq W$ și un homomorfism injectiv $h : W_1 \to U_3$.

Fie $w_0 \in h^{-1}(1)$. Deoarece W este finit există un idempotent $w_1 = w_0^k$, $w_1 \in W_1$. Avem $h(w_1) = 1$ și $h(w_1 W_1 w_1) = U_3$. Remarcăm că $w_1 W_1 w_1$ este un subsemigrup în W_1 și w_1 este o unitate în acest subsemigrup.

Fie W' un subsemigrup al lui $w_1 W_1 w_1$ astfel ca $h(W') = U_2$ și W' să fie minimal (în ceea ce privește ordinul) cu această proprietate.

Atunci, $\forall w' \in W'$ avem $h(w'W') = h(w')\, U_2 = U_2$.

Deoarece $w'W'$ este un subsemigrup în W', ținînd seama de minimalitatea lui W' rezultă $W' \subseteq w'W'$, de unde $W' = w'W'$. Subsemigrupul W' este simplu la dreapta, deoarece, dacă V este un ideal la dreapta în W', atunci $\forall w' \in V$ avem $W' = w'W' \subseteq V$. $W' \subseteq V \subseteq W'$, de unde $V = W'$.

Conform teoremei I.12.6, W' este izomorf cu un produs direct $G \times W_0$, unde G este un grup, iar W_0 este un semigrup nul la dreapta, $W' \cong G \times W_0$. Amintim că în demonstrarea teoremei I.12.6 G a fost ales de forma $W'v$, unde $v \in W_0$, iar W_0 era mulțimea elementelor idempotente din W'. Să observăm că $|W_0| \geqslant 2$, deoarece în cazul $|W_0| = 1$, $G \times W_0$ ar fi un grup și deci U_2 ar fi un grup (ca imagine homomorfă a unui grup), ceea ce ar contrazice definiția lui U_2.

Între semigrupurile introduse mai sus are loc următorul şir de incluziuni:

$$W_0 \subseteq W' \subseteq w_1 W_1 w_1 \subseteq W_1 \subseteq W.$$

Afirmăm că U_3 este izomorf cu semigrupul $Y = \{(w_1, w_1), (v, w_0'), (v, w_0'')\}$, unde v este unitatea grupului G, iar $w_0' \neq w_0''$ sînt elemente din W_0.

Într-adevăr, tabela de înmulţire a semigrupului Y este:

	(w_1, w_1)	(v, w_0')	(v, w_0'')
(w_1, w_1)	(w_1, w_1)	(v, w_0')	(v, w_0'')
(v, w_0')	(v, w_0')	(v, w_0')	(v, w_0'')
(v, w_0'')	(v, w_0'')	(v, w_0')	(v, w_0'')

şi izomorfismul Ω dintre U_3 şi Y este dat de $\Omega(1) = (w_1, w_1)$, $\Omega(r_0) = (v, w_0')$, $\Omega(r_1) = (v, w_0'')$.

Semigrupul Y este izomorf cu semigrupul $W_Y = \{w_1, w_0', w_0''\}$ cum se constată imediat formînd tabela de înmulţire a semigrupului W_Y şi ţinînd seama că w_1 este unitate bilaterală, iar w_0', w_0'' sînt unităţi la stînga.

Mai rămîne să observăm că semigrupul W_Y este subsemigrup în W.

În cazul $j = 2$, deci $U_2 | W$, existenţa unui subsemigrup al lui W izomorf cu U_2 se arată la fel ca mai sus.

În cazul $j = 1$ presupunînd $U_1 | W$ avem un subsemigrup $W_1 \subseteq W$ şi un homomorfism surjectiv $h: W_1 \to U_1$. Există $w_0 \in W_1$ astfel că $h(w_0) = 1$. Cum W_1 este finit există un idempotent $w_1 = w_0^k \in W_1$ (vezi teorema I.12.5). Subsemigrupul $w_1 W_1 w_1$ se aplică surjectiv pe U_1 deoarece $h(w_1 W_1 w_1) = 1 \cdot U_1 \cdot 1 = U_1$ şi w_1 este unitatea acestui subsemigrup. Fie $w' \in w_1 W_1 w_1$ cu proprietatea $h(w') = r_0$. Există un idempotent $w_1' = (w')^m \in w_1 W_1 w_1$ astfel ca $h(w_1') = r_0$. Elementele $\{w_1, w_1'\}$ formează un subsemigrup izomorf cu U_1 ceea ce rezultă din tabela de înmulţire a acestui subsemigrup,

	w_1	w_1'
w_1	w_1	w_1'
w_1'	w_1'	w_1'

Cazul $j = 0$ este banal. ■

Teorema II.9.4. *Semigrupurile din* **U** *sînt ireductibile.*

Demonstraţie. Să considerăm mai întîi cazul semigrupului $U_3 \in \mathbf{U}$ şi să presupunem că $U_3 | W_2 \times_h W_1$. Vom arăta că $U_3 | W_2$ sau $U_3 | W_1$.

Conform teoremei II.9.3 există un subsemigrup al lui $W_2 \times_h W_1$ fie el $X = \{(w_2, w_1), (w_2', w_1'), (w_2'', w_1'')\}$ izomorf cu U_3. Avem $\mathrm{pr}_{j_1} X = \{w_j, w_i',$

$w_j''\} \subseteq W_j$ unde $j_1 \neq j$. Mulțimea $\mathrm{pr}_2 X = \{w_1, w_1', w_1''\}$ este un subsemigrup al lui W_1, în care w_1 este o unitate. Dacă w_1, w_1', w_1'' sînt distincte atunci U_3 este izomorf cu $\mathrm{pr}_2 X$ și deci $U_3 | W_1$.

Dacă $w_1 = w_1'$ sau $w_1 = w_1''$ avem $w_1 = w_1' = w_1''$ deoarece în primul caz $w_1'' = w_1''w_1 = w_1''w_1' = w_1'$, iar în al doilea caz $w_1' = w_1'w_1 = w_1'w_1'' = w_1''$.

Atunci $h_{w_1} = h_{w_1'} = h_{w_1''}$ și U_3 este izomorf cu $\mathrm{pr}_2 X$.

În sfîrșit, dacă $w_1' = w_1''$ atunci $w_2' \neq w_2''$. Fie $\Psi : X \to W_2$, unde $\Psi(w_2, w_1) = h_{w_1'}(w_2)$, $\Psi((w_2', w_1')) = h_{w_1'}(w_2')$, $\Psi((w_2'', w_1')) = h_{w_1'}(w_2'')$.

Afirmăm că Ψ este un homomorfism injectiv.

Să observăm mai întîi că, deoarece h este un homomorfism de semigrupuri, de la W_1 la $\mathrm{End}(W_2)$ putem scrie:

$$h_{w_1}h_{w_1} = h_{w_1}, \quad h_{w_1}h_{w_1'} = h_{w_1'}h_{w_1} = h_{w_1'}h_{w_1'} = h_{w_1'}. \tag{II.9.1}$$

Atunci

$$\Psi((w_2^\alpha, w_1^\alpha) \times_h (w_2^\beta, w_1^\beta)) = \Psi((w_2^\alpha, w_1^\alpha))\Psi((w_2^\beta, w_1^\beta)),$$

unde (w_2^α, w_1^α), $(w_2^\beta, w_1^\beta) \in X$, ținînd seama de (II.9.1). De exemplu:

$$\Psi((w_2', w_1') \times_h (w_2'', w_1'')) = \Psi((w_2'h(w_2''), w_1'')) = h_{w_1'}(w_2'h_{w_1'}(w_2'')) =$$

$$= h_{w_1'}(w_2')\, h_{w_1'}(h_{w_1'}(w_2'')) = h_{w_1'}(w_2')\, h_{w_1'}(w_2'') = \Psi((w_2', w_1'))\, \Psi((w_2'', w_1'')),$$

deci Ψ este un homomorfism.

Din $U_3 \cong X$ urmează că $(w_2'', w_1') = (w_2', w_1') \times_h (w_2'', w_1') = (w_2'h_{w_1'}(w_2''), w_1')$ și $(w_2', w_1') = (w_2', w_1') \times_h (w_2', w_1') = (w_2'h_{w_1'}(w_2'), w_1')$ deci $h_{w_1'}(w_2') \neq h_{w_1'}(w_2'')$ deoarece $w_2' \neq w_2''$.

Apoi

$$(w_2', w_1') = (w_2', w_1') \times_h (w_2, w_1) = (w_2', h_{w_1'}(w_2), w_1'),$$

de unde $h_{w_1'}(w_2) \neq h_{w_1'}(w_2'')$.

În fine

$$(w_2'', w_1') = (w_2'', w_1') \times_h (w_2, w_1) = (w_2''h_{w_1'}(w_2), w_1')$$

și

$$(w_2', w_1') = (w_2'', w_1') \times_h (w_2', w_1') = (w_2''h_{w_1'}(w_2'), w_1'),$$

deci $h_{w_1'}(w_2) \neq h_{w_1'}(w_2')$ adică Ψ este injectiv.

Astfel X este izomorf cu subsemigrupul $\Psi(X) \subseteq W_2$ deci și U_3 este izomorf cu $\Psi(X)$, adică $U_3 | W_2$.

În mod analog se arată că semigrupurile U_2, U_1 și U_0 sînt ireductibile. ■

Teorema II.9.5. *Grupurile simple sînt ireductibile.*

Demonstrație. Fie G' un grup simplu și să presupunem că $G' | W_2 \times_k W_1$. Vom arăta că $G' | W_2$ sau $G' | W_1$. În baza teoremei II.9.1 există un subgrup $G \subseteq W_2 \times_k W_1$ și un homomorfism surjectiv $h : G \to G'$. Deoarece grupul G' este simplu, subgrupul $K = \ker h$ este subgrup normal maximal în G.

Fie $g_0 = (w_0'', w_0')$ unitatea lui G.

Aplicația $\mathrm{pr}_2 : G \to W_1$ fiind un homomorfism $G_1 = \mathrm{pr}_2(G)$ este un subgrup în W_1, a cărui unitate este w_0'. Fie $G_2' = \ker \mathrm{pr}_2 = \{(w_2, w_0') \mid w_2 \in W_2, (w_2, w_0') \in G\}$ și aplicația $\Psi : G_2' \to W_2$ definită prin:

$$\Psi((w_2, w_0')) = k_{w_0'}(w_2).$$

Vom observa mai întîi, că deoarece k este un homomorfism de semigrupuri, $k : W_1 \to \mathrm{End}\ W_2$, avem $k_{w_0'} = k_{w_0'} k_{w_0'}$. Putem astfel arăta că Ψ este un homomorfism injectiv de semigrupuri.

Într-adevăr avem

$$\Psi((w_2', w_0') \times_k (w_2'', w_0')) = \Psi((w_2' k_{w_0}(w_2''), w_0') =$$

$$= k_{w_0'}(w_2' k_{w_0'}(w_2'')) = k_{w_0'}(w_2')\ k_{w_0'}(k_{w_0'}(w_2'')) = k_{w_0'}(w_2')\ k_{w_0'}(w_2'') =$$

$$= \Psi(w_2', w_0') \Psi(w_2'', w_0')$$

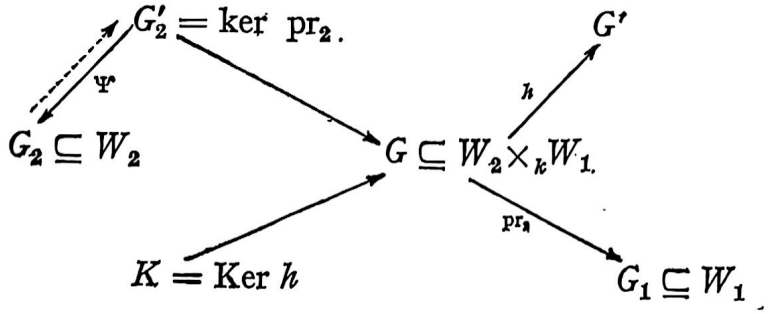
de unde rezultă că Ψ este un homomorfism.

Apoi, dacă $\Psi((w_2', w_0')) = \Psi((w_2'', w_0'))$ atunci cum $(w_2', w_0') = (w_0'', w_0') \times_k \times_k (w_2', w_0'') = (w_0'' k_{w_0'}(w_2'), w_0') = (w_0'' \Psi(w_2', w_0'), w_0') = (w_0'' \Psi(w_2'', w_0'), w_0') = (w_2'', w_0')$ și astfel Ψ este o aplicație injectivă.

În consecință G_2' este izomorf cu $\Psi(G_2') = G_2 \subseteq W_2$ și deci G_2 este un grup.

Diferitele grupuri care au intervenit în această primă fază a demonstrației sînt prezentate pentru ușurință în diagrama (II.9.2).

(II.9.2)



Cum K și G_2' sînt subgrupuri normale avem următorul lanț de subgrupuri normale:

$$K \subseteq K \cdot G_2' \subseteq G.$$

Din maximalitatea lui K rezultă că sînt posibile numai două situații:

a) $K = KG_2'$. În acest caz aplicînd teorema a doua de izomorfism a grupurilor avem

$$G' \cong \frac{G}{K} \cong \frac{G/G'}{K/G_2'} \cong \frac{G_1}{K/G_2'},$$

de unde $G' \mid G_1$. Cum G_1 este un subgrup al lui W_1, avem $G' \mid W_1$.

b) $G = KG_2'$. Atunci $G' = \frac{KG_2'}{K} = \frac{G_2'}{G_2' \cap K}$, în baza teoremei întîi de izomorfism a grupurilor. Cum $G_2' \cong G_2 \subseteq W_2$ conchidem că $G' \mid W_2$. ■

În continuare ne vom ocupa de legătura dintre aplicațiile definite pe semigrupuri libere cu valori într-un alfabet și automate.

Definiția II.9.11. *Automatul ataşat aplicației* $\varphi : I^* \to O$ este automatul

$$A(\varphi) = [I, S_\varphi, O, f_\varphi, g_\varphi]$$

unde:

$$S_\varphi = \{k \mid k : I^* \to O, \exists p \in I^*, k = \varphi L_p\}, \quad f_\varphi(k, q) = kL_q$$

și

$$g_\varphi(k, q) = k(q).$$

Observația II.9.4. Automatul $A(\varphi)$ este redus, deoarece dacă $g_\varphi(k_1, q) = g_\varphi(k_2, q)$, $\forall q \in I^*$ urmează $k_1(q) = k_2(q)$, $\forall q \in I^*$, adică $k_1 = k_2$.

Observația II.9.5. Unui automat determinist $A = [I, S, O, f, g]$ și unei stări $s_0 \in S$, li se poate ataşa automatul $A(g_{s_0})$.

Observația II.9.6. Fie aplicația $\varphi : I^* \to O$ și automatul $A(\varphi)$. Cuvintele $p, q \in I^*$ sînt echivalente în sens Nerode, $(p, q) \in \nu$, dacă și numai dacă stările φL_p și φL_q ale automatului $A(\varphi)$ coincid. Apoi, p și q sînt echivalente în sens Myhill, $(p, q) \in \mu$ dacă și numai dacă ele induc aceeași transformare pe mulțimea S_φ a stărilor automatului $A(\varphi)$, adică starea φL_r are același succesor prin cuvintele p și q, deci $\varphi L_r L_p = \varphi L_r L_q$.

Observația II.9.7. Automatul $A(\varphi)$ este S-finit dacă semigrupul $W_\varphi = I^*/\mu$ (vezi definiția II.9.2) este finit. Într-adevăr, avem:

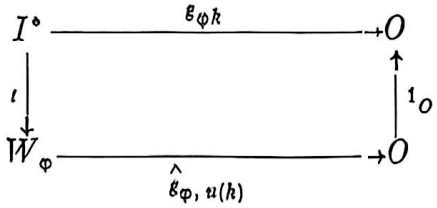
$$|S_\varphi| = |I^*/\nu| \leqslant |I^*/\mu| = |W_\varphi|.$$

Să considerăm acum automatul $\widetilde{A}(\varphi) = [W_\varphi, W_\varphi, O, \widetilde{f}_\varphi, \widetilde{g}_\varphi]$, unde $\widetilde{f}_\varphi([p], [q]) = [pq]$, iar $\widetilde{g}_\varphi([p], [q]) = \varphi(pq)$. Automatul $\widetilde{A}(\varphi)$ este redus.

Legătura dintre automatele $A(\varphi)$ și $\widetilde{A}(\varphi)$ este dată în:

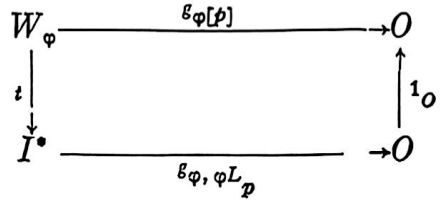
Teorema II.9.6. *Automatele* $A(\varphi)$ *și* $\widetilde{A}(\varphi)$ *sînt asociate.*

Demonstrație. Să arătăm că $A(\varphi) | \widetilde{A}(\varphi)$. Pentru aceasta definim tripletul de aplicații (t, u, w), unde $t : I^\bullet \to W_\varphi$ este dat prin $t(p) = [p]$, $u : S_\varphi \to W_\varphi$ este dat prin $u(k) = [p]$, pentru $k \in S_\varphi$, $k = \varphi L_p$, $p \in I^\bullet$ și $w : O \to O$ cu $w = 1_O$, care face comutativă diagrama:



Într-adevăr, dacă $q \in I^\bullet$, pe de o parte $g_{\varphi k}(q) = k(q) = \varphi(L_p(q)) = \varphi(pq)$ iar pe de altă parte $\widetilde{g}_{\varphi, u(k)}(t(q)) = \widetilde{g}_{\varphi, u(k)}([q]) = \widetilde{g}_\varphi([p], [q]) = \varphi(pq)$.

Să arătăm acum că $\widetilde{A}(\varphi) | A(\varphi)$. În acest scop introducem tripletul de aplicații (t', u', w'), unde $t' : W_\varphi \to I^\bullet$ este dat prin $t'([q]) = q$, $u' : W_\varphi \to S_\varphi$ este dat prin $u'([p]) = \varphi L_p \in S_\varphi$ și $w' : O \to O$ cu $w' = 1_O$ care face comutativă diagrama:



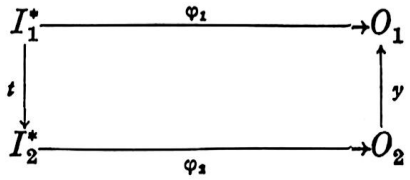
Avem, pentru

$$q \in I^\bullet,\ \widetilde{g}_{\varphi[p]}([q]) = \widetilde{g}_\varphi([p], [q]) = \varphi(pq),$$

iar

$$g_{\varphi, \varphi L_p}(t'([q])) = g_{\varphi, \varphi L_p}(q) = \varphi(L_p(q)) = \varphi(pq). \blacksquare$$

Definiția II.9.12. *Aplicația* $\varphi_1 : I_1^* \to O_1$ *divide aplicația* $\varphi_2 : I_2^* \to O_2$, $\varphi_1 | \varphi_2$ dacă există homomorfismul $t : I_1^* \to I_2^*$ și aplicația $y : O_2 \to O_1$ astfel ca diagrama

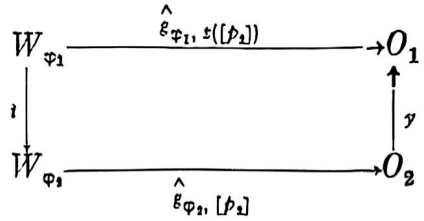


să fie comutativă, adică $\varphi_1 = y\varphi_2 t$.

Teorema II.9.7. $\varphi_1 | \varphi_2$ *dacă și numai dacă* $\widetilde{A}(\varphi_1) | \widetilde{A}(\varphi_2)$.

Demonstrație. Să presupunem mai întîi că $\varphi_1 | \varphi_2$, deci $\varphi_1 = y\varphi_2 t$. Vom arăta că $\widetilde{A}(\varphi_1) | \widetilde{A}(\varphi_2)$, utilizînd teorema II.7.1 care este aplicabilă, deoarece automatele $\widetilde{A}(\varphi_1)$ și $\widetilde{A}(\varphi_2)$ sînt reduse.

Fie $S_0 = \{[t(p_1)] \, p \in I^*\}$. Observăm că S_0 este un subsemigrup al lui W_{φ_1}, deoarece t este un homomorfism. Definim aplicația surjectivă $z : S_0 \to W_{\varphi_2}$ prin $z([t(p_1)]) = [p_1]$. Alegînd $t' : W_{\varphi_1} \to W_{\varphi_2}$ ca $t'([p_1]) = [t(p_1)]$, diagrama



este comutativă.

Într-adevăr, fie

$$[q] \in W_{\varphi_1} \; ; \; \widetilde{g}_{\varphi_1, z([p_2])}([q]) = \widetilde{g}_{\varphi_1}(z([p_1]), [q]) = \widetilde{g}_{\varphi_1}([p_1], [q]) = \varphi_1(p_1 q),$$

deoarece din $[p_2] \in S_0$ rezultă că $[p_2] = [t(p_1)]$, iar $z([p_2]) = [p_1]$

Apoi,

$$y(\widetilde{g}_{\varphi_1, [p_2]}, (t'([q]))) = y(\widetilde{g}_{\varphi_2, [p_2]}, ([t(q)])) = y\widetilde{g}_{\varphi_2}([p_2], [t(q)]) =$$
$$= y\varphi_2(p_2 t(q)) = y\varphi_2(t(p_1)t(q)) = y(\varphi_2(t(p_1 q))) = \varphi_1(p_1 q).$$

Să presupunem acum că $\widetilde{A}(\varphi_1) | \widetilde{A}(\varphi_2)$ și să arătăm că $\varphi_1 | \varphi_2$. Definim homomorfismul $t : I_1^* \to I_2^*$ prin $t(i_1) = p \in I_2^*$, $\forall i_1 \in I_1^*$ cu condiția ca $[i_1] = z([p])$ și observăm că pentru un cuvînt oarecare $p_1 \in I_1^*$, $t(p_1) = p_2 \in I_2^*$, cu proprietatea $[p_1] = z([p_2])$. (Aplicația z fiind surjectivă există cel puțin un p_2 cu această proprietate). Ținînd seama că $t(p_1) = p_2$, $z([p_2]) = [p_1]$, $t'([q]) = [t(q)]$ și de comutativitatea diagramei (II.9.3) exprimată prin $\widetilde{g}_{\varphi_1, z([p_2])}([q]) = y(\widetilde{g}_{\varphi_2, [p_2]}(t'([q])))$, avem $\widetilde{g}_{\varphi_1}(z([p_2]), [q]) = y(\widetilde{g}_{\varphi_2}([p_2], t'([q])))$ de unde $\widetilde{g}_{\varphi_1}([p_1], [q]) = y(\widetilde{g}_{\varphi_2}([t(p_1)], [t(q)]))$, deci $\varphi_1(p_1 q) = y(\varphi_2(t(p_1 q)))$, $\forall p_1, q \in I^*$. Prin urmare $\varphi_1 = y\varphi_2 t$. ■

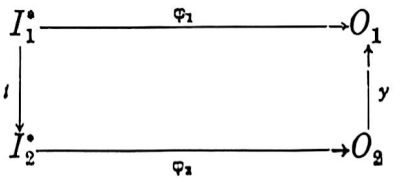
Consecința II.9.1. $\varphi_1 | \varphi_2$ dacă și numai dacă $A(\varphi_1) | A(\varphi_2)$.

Acest fapt rezultă imediat din teorema precedentă și din teorema II.9.6.

Teorema II.9.8. $\varphi_1 | \varphi_2$ *dacă și numai dacă* $X_{\varphi_1} | X_{\varphi_2}$.

Demonstrație. Să presupunem că $\varphi_1 | \varphi_2$. Atunci avem diagrama comutativă:

(II.9.4)



Pentru a dovedi că pentru semigrupurile condensate X_{φ_1} și X_{φ_2} avem $X_{\varphi_1} | X_{\varphi_2}$ trebuie să arătăm că există subsemigrupul $W'_{\varphi_2} \subseteq W_{\varphi_2}$, homomorfismul surjectiv $h : W'_{\varphi_2} \to W_{\varphi_1}$ și aplicația $k : O_2 \to O_1$ astfel ca diagrama:

(II.9.5.)

$$\begin{array}{ccc} W_{\varphi_2} \supseteq W'_{\varphi_2} & \xrightarrow{\varkappa_2 | W'_{\varphi_2}} & O_2 \\ {\scriptstyle h}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle k} \\ W_{\varphi_2} & \xrightarrow[\varkappa_1]{} & O_1 \end{array}$$

să fie comutativă.

Să alegem $W'_{\varphi_2} = t(I_1^*)/\mu^{\varphi_1}$. Definim $h([p_2]) = h([t(p_1)]) = [p_1]$ și $k = y$.

Să arătăm că aplicația h este bine definită. Fie $(t(p'_1), t(p''_2)) \in \mu^{\varphi_2}$; atunci $(p'_1, p'_2) \in \mu^{\varphi_1}$. Într-adevăr, deoarece $\varphi_1 = y\varphi_2 t$, pentru orice $q_1, q_2 \in I_1^*$, avem:

$$\varphi_1(q_1 p'_1 q_2) = y(\varphi_2(t(q,\ p'_1 q_2))) = y(\varphi_2(t(q_1)\ t(p'_1)\ t(q_1))) =$$
$$= y(\varphi_2(t(q_1)\ t(p''_1)\ t(q_2))) = y(\varphi_2(t(q_1 p''_1 q_2))) = \varphi_1(q_1 p''_1 q_2),$$

adică $(p'_1, p'_2) \in \mu^{\varphi_1}$.

Se constată imediat că h este un homomorfism surjectiv de semigrupuri și diagrama (II.9.5) este comutativă.

Reciproc, să presupunem că diagrama (II.9.5) este comutativă. Fie $p_1 \in I_1^*$; să definim $t(p_1) = p_2 \in I_2^*$ astfel ca $h([t(p_1)]) = [p_1]$, ceea ce este totdeauna posibil deoarece h este un homomorfism surjectiv. Să verificăm că diagrama (II.9.4) este comutativă,

$$y(\varphi_2(t(p_1))) = y(\varkappa_2([t(p_1)])) = \varkappa_1(h([t(p_1)])) = \varkappa_1([p_1]) = \varphi_1(p_1),$$

adică $y\varphi_2 t = \varphi_1$. ■

Consecința II.9.2. Dacă $\varphi_1 | \varphi_2$ atunci $W_{\varphi_1} | W_{\varphi_2}$. ■

Definiția II.9.13. *Automatul atașat semigrupului* W este automatul $A(W) = [W, W, W, f_W, g_W]$ unde $f_W(w_1, w_2) = g_W(w_1, w_2) = w_1 w_2$.

Definiția II.9.14. *Semigrupul atașat automatului* $A = [I, S, O, f\, g]$ *în starea* s_0 este semigrupul $W(A; s_0) = W_{g_{s_0}}$, iar *semigrupul condensat* atașat este $X(A, s_0) = (W(A, s_0), 0, \varkappa)$ unde $\varkappa([p]) = g_{s_0}(p)$.

Teorema II.9.9. *Dacă* $W_1 | W_2$ *atunci* $A(W_1) | A(W_2)$.

Demonstrație. Să presupunem că $W_1 | W_2$, adică există subsemigrupul $W'_2 \subseteq W_2$ și homomorfismul surjectiv $h : W'_2 \to W_1$. Trebuie să definim aplicațiile $t : W_1 \to W_2$, $u : W_1 \to W_2$, $y : W_2 \to W_1$ așa fel încît diagrama

$$\begin{array}{ccc} W_1 & \xrightarrow{g_{W_1, w_1}} & W_1 \\ {\scriptstyle t}\downarrow & & \uparrow{\scriptstyle y} \\ W_2 & \xrightarrow[g_{W_2, u(w_1)}]{} & W_2 \end{array}$$

să fie comutativă. Fie $w_1' \in W_1$. Să punem $u(w_1) = t(w_1) = w_2$, unde $w_2 \in \in h^{-1}(w_1)$. Definim y prin

$$y(w_2) = \begin{cases} h(w_2), & \text{dacă } w_2 \in W_2' \\ \text{arbitrar}, & \text{dacă } w_2 \in W_2 \setminus W_2'. \end{cases}$$

Avem

$$y(g_{W_2,\, u(w_1)}(t(w_1'))) = y(u(w_1)\ t(w_1')) = y(w_2 w_2'),$$

unde

$$w_2 \in h^{-1}(w_1) \quad \text{și} \quad w_2' \in h^{-1}(w_1').$$

Deoarece h este un homomorfism surjectiv $w_2,\ w_2' \in h^{-1}(w_1 w_1') \subseteq W_2'$, adică $y(w_2\ w_2') = w_1 w_1' = g_{W_1,\, w_1}(w_1')$ ■

Consecința II.9.3. Avem $A(W(A(W))) \mid A(W)$, ceea ce se obține din teorema precedentă, observînd că $W(A(W)) \mid W$, deoarece $W(A(W))$ este o imagine epimorfă a semigrupului W.

Teorema II.9.10. *Automatul* $A(W(A;\ s_0))$ *simulează automatul* $A = [I, S, O, f, g;\ s_0)$ *adică* $A \mid A\ (W\ (A;\ s_0))$.

Demonstrație. Să considerăm aplicațiile $t : I^* \to W(A;\ s_0)$, $u : S \to W(A;\ s_0)$ și $y : W(A;\ s_0) \to O$, date prin $t(p) = [p]$, $u(s) = [q]$, unde $s = g(s_0, q)$ și $y([p]) = g_{s_0}(p)$. Atunci diagrama

$$\begin{array}{ccc} I^* & \xrightarrow{\quad g_s \quad} & O \\ {\scriptstyle t}\downarrow & & \uparrow{\scriptstyle y} \\ W(A;\ s_0) & \xrightarrow[g_{W(A;\ s_0),\, u(s)}]{} & W(A;\ s_0) \end{array}$$

este comutativă, deoarece

$$y(g_{W(A;\ s_0),\, u(s)}(t(p))) = y(g_{W(A;\ s_0)}(u(s), [p])) = y(g_{W(A;\ s_0)}([q], [p])) =$$

$$= y([qp]) = g_{s_0}([qp]) = g(s_0, qp) = g(f\ (s_0, q), p) = g(s, p) = g_s(p),$$

$$\forall p \in I^*. \text{ ■}$$

Teorema II.9.11. *Fie* W_1, W_2 *două semigrupuri și aplicațiile* $\eta : W_2 \times W_1 \to$ $\to W_1$, $\xi : (W_2 \times W_1) \times W_1 \to W_2$ *definite prin* $\eta(w_2, w_1) = w_1$, $\xi((w_2, w_1), w_1') = h(w_1')\ (w_2)$, *unde* $h : W_1 \to \operatorname{End} W_2$. *Dacă* $W \mid W_2 \times_h W_1$ *atunci* $A(W) \mid A(W_2) \times_{(\xi,\, \eta)} A(W_1)$, *unde automatul* $A(W_2) \times_{(\xi,\, \eta)} A(W_1)$ *are produsul direct* $W_2 \times W_1$ *ca alfabet de intrare, mulțime de stări și alfabet de ieșire.*

Demonstrație. Să presupunem că $W \mid W_2 \times_h W_1$. Atunci există un subsemigrup $W' \subseteq W_2 \times_h W_1$ și un homomorfism surjectiv $k : W' \to W$. Să considerăm atunci cascada

$$A(W_2) \times_{(\xi, \eta)} A(W_1) = [W_2 \times W_1,\ W_2 \times W_1,\ W_2 \times W_1,\ f',\ g'],$$

unde aplicația h din definiția lui ξ este aceeași cu homomorfismul h din definiția produsului semidirect.

Este necesar să definim aplicațiile $t : W \to W_2 \times W_1$, $u : W \to W_2 \times W_1$, $y : W_2 \times W_1 \to W$ așa fel încît diagrama

$$\begin{array}{ccc} W & \xrightarrow{g_w} & W \\ {\scriptstyle t}\downarrow & & \uparrow{\scriptstyle y} \\ W_2 \times W_1 & \xrightarrow[g'_{u(w)}]{} & W_2 \times W_1 \end{array}$$

să fie comutativă. Este clar că $g'((w_2, w_1), (w_2', w_1')) = (w_2 h_{w_1}(w_2'), w_1 w_1')$. Deoarece k este un homomorfism surjectiv oricare ar fi $w \in W$ putem defini $u(w) = t(w) = (w_2, w_1)$, unde $(w_2, w_1) \in k^{-1}(w)$. Evident $t(w\, w') = (w_2, w_1) \times_h \times_h (w_2', w_1')$. Obținem $g'_{u(w)}(t(w')) = g'_{(w_2, w_1)}((w_2', w_1') = g'((w_2, w_1), (w_2', w_1')) = (w_2, w_1) \times_h (w_2', w_1') \in W'$. Astfel y poate fi definit punînd

$$y((w_2, w_1)) = \begin{cases} k((w_2, w_1)), & \text{dacă } (w_2, w_1) \in W' \\ \text{arbitrar}, & \text{dacă } (w_2, w_1) \notin W'. \end{cases}$$

Atunci $y(g'_{u(w)}(t(w')) = ww' = g_w(w')$, ceea ce face diagrama comutativă. ■

Teorema II.9.12. *Dacă* $A_1 \mid A_2$ *atunci* $W(A; s_{01}) \mid W(A_2; s_{02})$.

Demonstrație. Dacă $A_1 \mid A_2$ atunci rezultă imediat că $g_{1, s_{01}} \mid g_{2, s_{02}}$ și deci $W(A_1; s_{01}) \mid W(A_2; s_{02})$ în baza consecinței II.9.2 și a definiției II.9.14. ■

Definiția II.9.15. *Automatul* A este *tare ireductibil* dacă din $A \mid A_1 \times_{(\xi, \eta)} A_2$ urmează $A \mid A_1$ sau $A \mid A_2$.

Observația II.9.8. Condiția de tare-ireductibilitate este foarte restrictivă (vezi Arbib [14], pg. 307—309). De aceea este necesară introducerea unei noțiuni mai slabe.

Definiția II.9.16. Fie $A = [I, S, O, f, g; s_0]$ și $A_j = [I_j, S_j, O_j, f_j, g_j; s_{0j}]$, $j = 1, 2$. *Automatul* A este *ireductibil* dacă din $A \mid A_1 \times_{(\xi, \eta)} A_2$ urmează $A \mid A(W(A_1; s_{01}))$ sau $A \mid A(W(A_2; s_{02}))$.

Teorema II.9.13. *Dacă automatul* A *este ireductibil, atunci semigrupul* $W(A; s_0)$ *este ireductibil.*

Demonstrație. Să presupunem că A este ireductibil și că $W(A, s_0) \mid W_2 \times_h \times_h W_1$. Atunci $A(W(A; s_0) \mid A(W_2) \times_{(\xi, \eta)} A(W_1)$ conform teoremei II.9.11. Cum $A \mid A(W(A; s_0))$ (în baza teoremei II.9.10) avem $A \mid A(W_2) \times_{(\xi, \eta)} A(W_1)$.

Automatul A fiind ireductibil are loc sau $A \mid A(W(A(W_2)))$ sau $A \mid A(W(A(W_1)))$, ceea ce, datorită consecinței II.9.3, revine la $A \mid A(W_2)$ sau $A \mid (A(W_1))$. În sfîrșit, din teorema II.9.12 urmează că $W(A; s_0) \mid W(A(w_2))$ sau $W(A; s_0) \mid W(A(W_1))$ și cum $W(A(W)) \mid W$ obținem $W(A; s_0) \mid W_2$ sau $W(A; s_0) \mid W_1$, adică semigrupul $W(A; s_0)$ este ireductibil. ■

Teorema II.9.14. *Oricare ar fi aplicațiile* ξ, η *există aplicațiile* ξ_1, η_1 *astfel ca* $A_2 \times_{(\xi,\eta)} A_1 \mid A(W(A_2, s_{02})) \times_{(\xi_1,\eta_1)} A(W(A_1; s_{01}))$.

Demonstrație. Conform teoremei II.9.10 avem $A_2 \mid A(W(A_2; s_{02}))$ și $A_1 \mid A(W(A_1; s_{01}))$, adică există simulările $\Psi_j = (t_j, u_j, y_j)$, $j = 1, 2$, ale automatelor $A(W(A_j, s_{0j}))$, $j = 1, 2$ de către automatele A_1, A_2, respectiv.

Să alegem $\eta_1 = t_1\eta$ și $\xi_1 = t_2\xi'$, unde $\xi' : W(A_1; s_{01}) \times I_0 \to I_2$ este dată de $\xi'([q], p) = \xi(y_1([q]), p)$, aplicație care este bine definită ținînd seama de definiția aplicației y_1.

Alegînd același alfabet de intrare I_0 pentru ambele cascade, tripletul $\Psi = (1_{I_0}, u, y)$, unde $u((s_2, s_1)) = ([q_2], [q_1])$, dacă $s_j = f_j(s_{0j}, q_j)$, $j = 1, 2$, iar $y([q_2], [q_1]) = (y_2([q_2]), y_1([q_1]))$ constituie o simulare a automatului $A_2 \times_{(\xi,\eta)} A_1$ prin automatul $A(W(A_2; s_{02})) \times_{(\xi_1,\eta_1)} A(W(A; s_{01}))$ întrucît face comutativă diagrama

$$\begin{array}{ccc} I_0^* & \xrightarrow{g(s_2, s_1)} & O_2 \times O_1 \\ {\scriptstyle 1_{I_0}}\downarrow & & \uparrow{\scriptstyle (y_2, y_1)} \\ I_0^* & \xrightarrow[\hat{g}(u(s_2, s_1))]{} & W(A_2; s_{02}) \times W(A_1; s_{01}) \end{array}$$

Într-adevăr, avem

$$\hat{g}_{(u(s_2, s_1))}(p) = \hat{g}(([q_2], [q_1]), p) = g_{W(A_2; s_{02})}([q_2], t_2\xi'(p, g_{W(A_1; s_{01})}([q_1], t_1\eta(p)))),$$

$$g_{W(A_1; s_{01})}([q_1], t_1\eta(p))) =$$

$$= (g_{W(A_2; s_{02})}([q_2]\ [\xi'([q_1\eta(p)], p)]), [q_1\eta(p)]) =$$

$$= ([q_2\xi'([q_1\eta(p)], p)], [q_1\eta(p)]).$$

Mai departe

$$y(\hat{g}_{(u(s_2, s_1))}(p)) = (y_2([q_2\xi'([q_1\eta(p)], p]) y_1([q_1\eta(p)])) =$$

$$= (y_2([q_2\ \xi(y_1(q_1\eta(p)), p)]), y_1([q_1\eta(p)])) =$$

$$= g_{2, s_1}(\xi(g_{1, s_1}(\eta(p)), p)), g_{1, s_1}(\eta(p))) = g_{(s_2, s_1)}(p). \blacksquare$$

Automatul care realizează simularea lui $A_2 \times_{(\xi,\eta)} A_1$ este reprezentat în fig. II.9.1.

Teorema II.9.15. *Avem:*

$$W(A_2 \times_{(\xi,\eta)} A_1; (s_{02}, s_{01})) \mid W(A_1; s_{01}) \text{ wr } W(A_2; s_{02}).$$

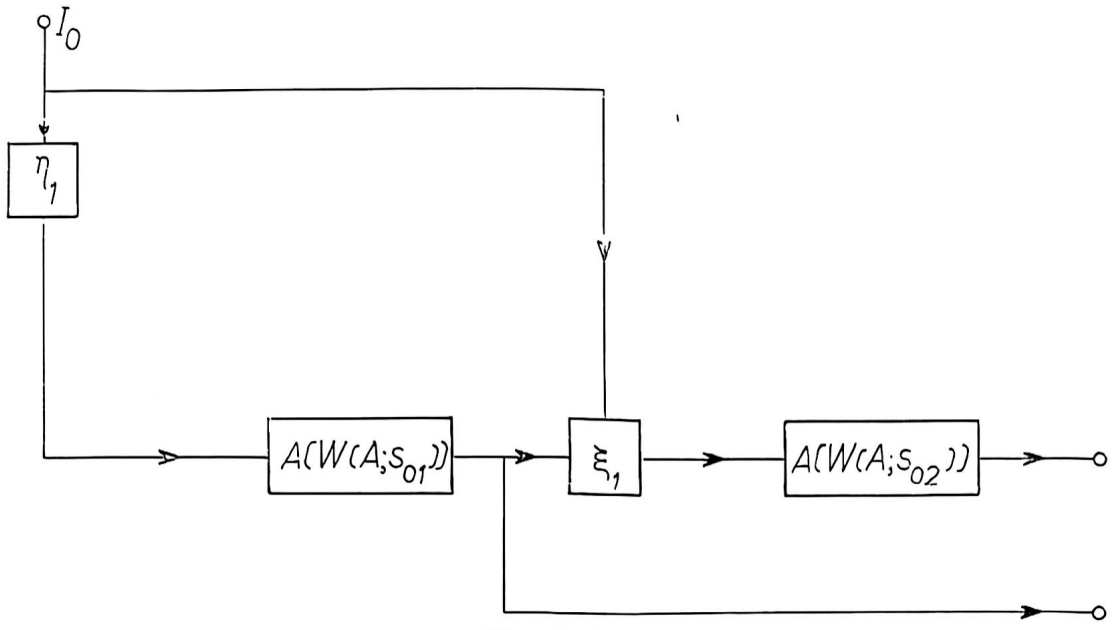


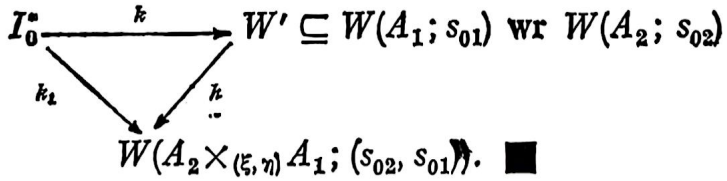
Fig. II.9.1

Demonstrație. Vom arăta că există un subsemigrup $W' \subseteq W(A_1; s_{01})$ wr $W(A_2; s_{02})$ și un homomorfism surjectiv de semigrupuri $h : W' \to W(A_2 \times_{(\xi,\eta)} A_1; (s_{02}, s_{01}))$.

Fie aplicația $k : I_0 \to W(A_1; s_{01})$ wr $W(A_2; s_{02})$, unde $k(i) = (\xi_1(i)(.), \eta_1(i))$. Deoarece I_0^* este semigrupul liber generat de mulțimea I_0, aplicația k se prelungește la un homomorfism de semigrupuri $k : I_0^* \to W(A_1; s_{01})$ wr $W(A_2; s_{02})$, $k(p) = (\xi_1(p)(.), \eta_1(p))$. Fie $W' = k(I_0^*)$. Corestricția lui k la subsemigrupul W' este un homomorfism surjectiv.

Deoarece $W(A_2 \times_{(\xi,\eta)} A_1, (s_{02}, s_{01})) = I_0^*/\mu^{g'(s_{02}, s_{01})}$ unde $g' = g_{A_2 \times_{(\xi,\eta)} A_1}$, există homomorfism surjectiv canonic $k_1 : I_0^* \to W(A_2 \times_{(\xi,\eta)} A_1; (s_{02}, s_{01}))$. Avem $\ker k \subseteq \ker k_1$. Într-adevăr, dacă $k(p_1) = k(p_2)$ atunci $\xi_1(p_1)(.) = \xi_1(p_2)(.)$ și $\eta_1(p_1) = \eta_1(p_2)$, adică oricare ar fi stările în care se află automatele $A(W(A_1; s_{01}))$ și $A(W(A_2; s_{02}))$ răspunsurile automatului $A(W(A_2; s_{02})) \times_{(\xi_1, \eta_1)} \times_{(\xi_1, \eta_1)} A(W(A_1; s_{01})$ prin introducerea oricăruia din cuvintele p_1 și p_2 sînt identice, adică $(p_1, p_2) \in \ker k_1$.

Ca atare există homomorfismul surjectiv $h : W' \to W(A_2 \times_{(\xi,\eta)} A; (s_{02}, s_{01}))$ care face comutativă diagrama:



■

Teorema II.9.16. *Dacă $W(A; s_0)$ este un semigrup ireductibil atunci automatul A este ireductibil.*

Demonstrație. Să presupunem că $A \mid A_2 \times_{(\xi,\eta)} A_1$. Atunci, conform teoremei II.9.12, $W(A; s_0) \mid W(A_2 \times_{(\xi,\eta)} A_1; (s_{02}, s_{01}))$ și din teorema II.9.15 și observația II.9.2 avem $W(A; s_0) \mid W(A_1; s_{01})$ wr $W(A_2; s_{02}) = F(W(A_1; s_{01}), W(A_2; s_{02})) \times_s W(A_1; s_{01})$.

Cum semigrupul $W(A; s_0)$ este ireductibil avem sau $W(A; s_0) \mid W(A_1; s_{01})$ sau $W(A; s_0) \mid F(W(A_1; s_{01}), W(A_2; s_{02}))$.

În al doilea caz avem $W(A; s_0) \mid W(A_2; s_{02})$, deoarece $F(W(A_1; s_{01}), W(A_2; s_{02})) \cong W(A_2; s_{02}) \times \ldots \times W(A_2; s_{02})$, unde produsul cuprinde $\mid W(A_1; s_{01}) \mid$ factori.

Din teorema II.9.9 obținem $A(W(A; s_0)) \mid A(W(A_j; s_{0j})$ unde $j = 1$ sau $j = 2$ și, deoarece $A \mid A(W(A; s_0))$ (vezi teorema II.9.10) avem $A \mid A(W(A_j, s_{0j}))$ pentru $j = 1$ sau $j = 2$, adică automatul A este ireductibil. ■

Teorema II.9.17. *Un automat A este ireductibil dacă și numai dacă semigrupul atașat $W(A; s_0)$ este ireductibil.*

Demonstrație. Rezultă imediat din teoremele II.9.13 și II.9.16. ■

Consecința II.9.4. Dacă semigrupul $W(A; s_0)$ aparține mulțimii **U** sau este un grup simplu atunci automatul A este ireductibil.

Rezultă din teorema precedentă și din teoremele II.9.4 și II.9.5. ■

§ II. 10. OPERATORI PE SEMIGRUPURI

În paragraful precedent ne-am ocupat de legătura care se poate stabili între automate și semigrupuri, precum și de realizarea prin automate a aplicațiilor definite pe semigrupuri cu valori într-un alfabet. Vom studia acum realizarea în automate a unor aplicații între semigrupuri.

Definiția II.10.1. Fie I_1, I_2 două alfabete, I_1^* I_2^* semigrupurile libere generate de ele. Un *operator* pe (I_1, I_2) este o aplicație $\varphi : I_1^* \to I_2^*$.

Observația II.10.1. Un automat determinist $A = [I, S, O, f, g]$ realizează prin orice stare $s \in S$, un operator γ_s pe (I, O) punînd:

$$(II.10.1) \quad \gamma_s(p) = \gamma_s(i_1 i_2 \ldots i_n) = g_s(i_1)\, g_{f(s,i_1)}(i_2) \ldots g_{f(s, i_1 \ldots i_{n-1})}(i_n), \quad \forall p \in I^*.$$

Vom considera și aplicația $\gamma : S \times I^* \to O^*$ definită prin $\gamma(s, p) = \gamma_s(p)$, care ne va fi utilă ulterior (v. § II. 13). Convenim să notăm cu

$$\gamma(S_1, p) = \bigcup_{s_1 \in S_1} \gamma(s_1, p).$$

Formula (II.10.1) se mai poate scrie sub forma:

(II.10.2) $\gamma_s(p) = g_s(i_1)\, g_s \circ L_{i_1}(i_2)\, g_s \circ L_{i_1 i_2}(i_3) \ldots g_s \circ L_{i_1 i_2 \ldots i_{n-1}}(i_n)$ *,

folosind aplicațiile L_p: $I_1^* \to I_1^*$ introduse în § II.9. De aici

$$\gamma_s(pq) = \gamma_s(i_1 \ldots i_n i'_1 \ldots i'_m) =$$

$$= g_s(i_1)\, g_s \circ L_{i_1}(i_2) \ldots g_s \circ L_{i_1 \ldots i_{n-1}}(i_n)\, g_s \circ L_p(i'_1) \ldots g_s \circ L_{pi'_1 \ldots i'_{m-1}}(i'_m) =$$

$$= \gamma_s(p)\, g_s \circ L_p(i'_1) \ldots g_s \circ L_{pi'_1 \ldots i'_{m-1}}(i'_m) =$$

$$= \gamma_s(p)\, g_{f(s,p)}(i'_1) g_{f(s,p)} \circ L_{i'_1}(i'_2) \ldots g_{f(s,p)} \circ L_{i'_1 i'_2 \ldots i'_{m-1}}(i'_m) = \gamma_s(p)\, \gamma_{f(s,p)}(q),$$

deci

(II.10.3) $$\gamma_s(pq) = \gamma_s(p)\gamma_{f(s,p)}(q).$$

Definiția II.10.2. Un *operator* φ pe (I_1, I_2) este *realizabil în automatul* $A = [I_1, S, I_2, f, g]$, prin starea $s \in S$, dacă

(II.10.4) $$\varphi(p) = \gamma_s(p), \quad \forall p \in I_1^*.$$

Teorema II.10.1 *Fie* φ *un operator pe* (I, O) *realizabil în automatul* $A = [I, S, O, f, g]$ *prin starea* s. *Atunci:*

a) $l(\varphi(p)) = l(p)$, $\forall p \in I^*$,

b) $\forall p, q \in I^*$, $\exists r \in O^*$ *astfel ca* $\varphi(pq) = \varphi(p)\, r$.

Demonstrație. a) Rezultă imediat din formulele (II.10.1) și (II.10.4). b). Dacă $p = i_1 \ldots i_n$, $q = i'_1 \ldots i'_m$ avem, în baza formulei (II.10.3)

$$\varphi(pq) = \gamma_s(pq) = \gamma_s(p)\, \gamma_{f(s,p)}(q) = \varphi(p)r,$$

unde am luat $r = \gamma_{f(s,p)}(q)$. ■

Definiția II.10.3. Un *operator* pe (I, O) este *semisecvențial (secvențial)* dacă satisface condiția b) (condițiile a) și b)) din teorema II.10.1.

Definiția II.10.4. Fie φ un operator semisecvențial pe (I, O). Operatorul $\varphi_p : I^* \to O^*$ este *starea operatorului* φ *în* cuvîntul $p \in I^*$, dacă $\varphi(pq) = \varphi(p)\, \varphi_p(q)$ $\forall q \in I^*$.

Teorema II.10.2. *Stările unui operator semisecvențial (secvențial) sînt operatori semisecvențiali (secvențiali).*

---

* Am notat $g_s \circ L_q(i) = g_s(qi) = g(s, qi) = g(f(s, q), i) = g_{f(s,q)}(i)$ și doarece operația „$\circ$" leagă mai puternic decît operația de concatenare din semigrup nu am mai folosit paranteze;

$$g_s(i_1)\, g_s \circ L_{i_1}(i_2) = g_s(i_1)\, (g_s \circ L_{i_1}(i_2)).$$

Demonstrație. Fie φ semisecvențial. Avem

$$\varphi(pru) = \varphi(p)\,\varphi_p(ru) = \varphi(pr)\,\varphi_{pr}(u) = \varphi(p)\,\varphi_p(r)\,\varphi_{pr}(u),$$

deci

$$\varphi_p(ru) = \varphi_p(r)\,\varphi_{pr}(u),$$

ceea ce arată că operatorul φ_p satisface condiția b) din teorema II.10.1. Dacă în plus operatorul φ satisface și condiția a) atunci din $\varphi(pr) = \varphi(p)\,\varphi_p(r)$ urmează $l(\varphi_p(r)) = l(\varphi(pr) - l(\varphi(p)) = l(pr) - l(p) = l(r)$, deci φ_p este secvențial. ■

Observația II.10.2. Dacă $p = i_1 \dots i_n$ și φ este un operator semisecvențial, atunci

$$\varphi(i_1 \dots i_n) = \varphi(i_1)\,\varphi_{i_1}(i_2)\,\varphi_{i_1 i_2}(i_3) \dots \varphi_{i_1 \dots i_{n-1}}(i_n). \tag{II.10.5}$$

Teorema II.10.3. *Orice operator secvențial pe (I, O) este realizabil într-un automat determinist $A^\varphi = [I, S^\varphi, O, f^\varphi, g^\varphi]$.*

Demonstrație. Fie $S^\varphi = \{\varphi_p \mid p \in I^*\}$ iar $f^\varphi(\varphi_p, i) = \varphi_{pi}, g^\varphi(\varphi_p, i) = \varphi_p(i)$. Vom arăta prin inducție după $l(r)$ că

$$f^\varphi(\varphi_p, r) = \varphi_{pr} \text{ și } g^\varphi(\varphi_p, r) = \varphi_{pi_1 \dots i_s}(i),$$

unde $r = i_1 i_2 \dots i_s i$.

Pasul inițial, $l(r) = 0$, este banal, observînd că $\varphi_p(e) = e$.
Trecem acum de la $l(r) = n$ la $l(ri) = n + 1$. Avem

$$f^\varphi(\varphi_p, ri) = f^\varphi(f^\varphi(\varphi_p, r), i) = f^\varphi(\varphi_{pr}, i) = \varphi_{pri},$$

$$g^\varphi(\varphi_p, ri) = g^\varphi(f^\varphi(\varphi_p, r), i) = g^\varphi(\varphi_{pr}, i) = \varphi_{pr}(i).$$

În automatul A^φ operatorul secvențial φ este realizat prin starea φ_e. Într-adevăr

$$\gamma_{\varphi_e}(p) = \gamma_{\varphi_e}(i_1 \dots i_n) = g^\varphi_{\varphi_e}(i_1)\, g^\varphi_{f^\varphi(\varphi_e, i_1)}(i_2) \dots g^\varphi_{f^\varphi(\varphi_e, i_1 i_2 \dots i_{n-1})}(i_n) =$$

$$= g^\varphi(\varphi_e, i_1)\, g^\varphi(f^\varphi(\varphi_e, i_1), i_2) \dots g^\varphi(f^\varphi(\varphi_e, i_1 i_2 \dots i_{n-1}), i_n) =$$

$$= \varphi_e(i_1)\,\varphi_{i_1}(i_2) \dots \varphi_{i_1 i_2 \dots i_{n-1}}(i_n) = \varphi(i_1 i_2 \dots i_n) = \varphi(p),$$

deoarece $\varphi_e(i_1) = \varphi(i_1)$.

Am ținut seama și de formula (II.10.5).
Automatul A^φ construit în teorema II.10.3 îl vom numi *automatul canonic atașat operatorului* φ.

Teorema II.10.4. *Dacă operatorul secvențial* φ *pe* (I, O) *este realizat într-un automat* $A = [I, S, O, f, g,]$ *prin starea* $s \in S$ *atunci toate stările* $\{\varphi_p\}_{p \in I^*}$ *ale operatorului* φ *sînt realizabile în același automat, operatorul* φ *fiind realizat prin starea* $f(s, p)$.

Demonstrație. Avem $\varphi(pr) = \gamma_s(pr) = \gamma_s(p)\, \gamma_{f(s,p)}(r) = \varphi(p)\, \varphi_p(r)$. Cum $\varphi(p) = \gamma_s(p)$ urmează $\varphi_p(r) = \gamma_{f(s,p)}(r)$, $\forall r \in I^*$. ■

Consecința II.10.1. Deoarece starea φ_p a operatorului secvențial φ este tot un operator secvențial, există un automat determinist A^{φ_p} în care φ_p este realizabil. Mai mult orice stare φ_p este realizabilă în automatul A^{φ}.

Consecința II.10.2. Fie φ un operator secvențial și A un automat în care φ este realizabil prin starea s. Aplicația $u : S^{\varphi} \to S$ definită prin $u(\varphi_p) = f(s, p)$ este injectivă de unde $|S^{\varphi}| \leqslant |S|$. De aici urmează că automatul canonic A^{φ} (vezi teorema II.10.3) este optimal pentru realizarea operatorului φ, în ceea ce privește cardinalul mulțimii stărilor. Mai mult, $A > A^{\varphi}$.

Într-adevăr pentru

$$\forall \varphi_p \in S^{\varphi}, \quad \exists s_1 = f(s, p) \in S \quad \text{cu} \quad (\varphi_p, s_1) \in \rho$$

adică

$$g^{\varphi}(\varphi_p, q) = g(f(s, p), q), \quad \forall q \in I^*.$$

Fie $q = ri$, atunci

$$g^{\varphi}(\varphi_p, ri) = \varphi_{pr}(i) = \gamma_{f(s,pr)}(i),$$

iar

$$g(f(s, p), qi) = g(s, pqi) = g(f(s, pq), i) = \gamma_{f(s,pq)}(i).$$

O noțiunea importantă pentru caracterizarea operatorilor semisecvențiali este aceea de memorie.

Definiția II.10.5. *Memoria unui operator* semisecvențial φ este $M(\varphi) = |S^{\varphi}| - 1$.

Consecința II.10.3 Un operator secvențial φ poate fi realizat într-un automat S-finit dacă și numai dacă φ posedă un număr finit de stări, adică are memorie finită.

Există operatori secvențiali pe semigrupuri generate de alfabete finite care nu sînt realizabili în automate S-finite. În baza consecinței II.10.3 acest lucru se întîmplă pentru operatori cu memoria infinită.

Exemplul II.10.1. Fie aplicația $[\varphi : \{i\}^* \to \{0, 1\}^*$, unde $\varphi(i^n) = o_1 o_2 \ldots o_n$, $n \in N$, iar

$$o_j = \begin{cases} 1, & \text{dacă } \exists k, j = k^2 \\ 0, & \text{în caz contrar.} \end{cases}$$

Ne convingem imediat că φ este un operator secvențial. Într-adevăr, $l(\varphi(i^n)) = l(i^n) = n$ și $\varphi(i^{n+m}) = \varphi(i^n)\, r$.

Să notăm cu φ_n starea operatorului φ în cuvîntul i^n. Vom arăta că aplicația $\mu : N \to S^\varphi$ definită prin $\mu(n) = \varphi_n$ este injectivă.

Pentru orice $n \in N$, $\exists k$, $j \in N^*$ astfel ca $\varphi_n(i^k) = 0^{k-1}1, \varphi_n(i^{k+j}) = 0^{k-1}1\,0^{j-1}1$. Avem $\varphi(i^{n+k}) = \varphi(i^n\, i^k) = \varphi(i^n)\ \varphi_n(i^k)$, dar $\varphi(i^{n+k}) = o_1 o_2 \ldots o_n o_{n+1} \ldots o_{n+k}$ de unde $\varphi_n(i^k) = o_{n+1} \ldots o_{n+k}$; este suficient să alegem pe k și pe j în așa fel încît $n + k$ și $n + k + j$ să fie primele două pătrate perfecte mai mari decît n.

Dacă $\varphi_n = \varphi_m$, atunci cuvintele $\varphi(i^{n+k})$, $\varphi(i^{n+k+j})$, $\varphi(i^{m+k})$, $\varphi(i^{m+k+j})$ se termină toate cu 1. Rezultă că perechile $n + k$, $n + k + j$, respectiv $m + k$, $m + k + j$ sînt pătrate consecutive și atunci $\exists n_1$, $n_2 \in N^*$, astfel ca

$$n + k = n_1^2, \qquad n + k + j = (n_1 + 1)^2,$$
$$m + k = n_2^2, \qquad m + k + j = (n_2 + 1)^2.$$

De aici prin scădere $(n_2 + 1)^2 - n_2^2 = (n_1 + 1)^2 - n_1^2$ sau $n_1 = n_2$ și deci $m = n$. Operatorul secvențial φ posedă deci o infinitate de stări.

Observația II.10.3. O aplicație φ între două semigrupuri I_1^*, I_2^* asupra căreia nu se impun condițiile din teorema II.10.1 poate fi realizată într-un automat $A(\varphi)$ în sensul din § II.9, luînd $O = I_2^*$.

Dacă renunțăm la univalența aplicației φ sîntem conduși la noțiunea mai generală descrisă în:

Definiția II.10.6. Un *operator nedeterminist* pe (I_1, I_2) este o aplicație $\varphi : I_1^* \to \mathcal{P}(I_2^*)$.

Observația II.10.4. Operatorii introduși prin definiția II.10.1 pot fi concepuți ca operatori nedeterminiști cu proprietatea $|\varphi(p)| = 1$, $\forall p \in I^*$.

Observația II.10.5. Un automat nedeterminist $A = [I, S, O, f, g]$ realizează prin orice stare $s \in S$, un operator nedeterminist γ_s pe (I, O) luînd

$$\gamma_s(p) = \gamma_s(i_1 i_2 \ldots i_n) = g_s(i_1)\, g_{f(s,\, i_1)}(i_2) \ldots g_{f(s,\, i_1 i_2 \ldots i_{n-1})}(i_n), \quad \forall p \in I^*. \tag{II.10.6}$$

Aici, în membrul al doilea avem produsul unor complexe din semigrupul liber O^*.

Observația II.10.6. Formulele (II.10.2) și (II.10.3) rămîn valabile și pentru operatorii nedeterminiști cu precizarea care s-a făcut și în observația II.10.6.

Definiția II.10.7. Un *operator* φ *nedeterminist* pe (I, O) este *realizabil în automatul* nedeterminist $A = [I, S, O, f, g]$, printr-o mulțime de stări $S_1 \subseteq S$, dacă

$$\varphi(p) = \gamma_{S_1}(p), \qquad \forall p \in I^*,$$

unde $\gamma_{S_1}(p) = \bigcup_{s \in S_1} \gamma_s(p)$.

Dacă $S_1 = \{s\}$ se spune că operatorul nedeterminist φ este realizat în A prin starea s și vom scrie $\varphi = \gamma_s$.

Observația II.10.7. Un operator φ nedeterminist realizabil în automatul nedeterminist prin mulțimea de stări S_1, devine realizabil în macroautomatul $M(A)$ printr-o stare $S_1 \in \mathcal{P}^*(S)$.

Teorema II.10.5. *Fie φ un operator nedeterminist pe (I, O) realizabil în automatul nedeterminist A. Atunci:*

a) $\forall r \in \varphi(p) \quad l(p) = l(r)$,

b) $\forall p, q \in I^*$, $\exists O^{\varphi}_{r,q} \in \mathcal{P}^*(O)$ *astfel ca* $\varphi(pq) = \varphi(p)\, O^{\varphi}_{p,q}$.

Demonstrație. Rezultă imediat din observația II.10.7 și teorema II.2.1. ■

Definiția II.10.8 Un *operator nedeterminist* φ pe (I, O) *este semisecvențial (secvențial)* dacă satisface condiția b) (condițiile a) și b) din teorema II.10.5).

Definiția II.10.9. Fie φ un operator nedeterminist secvențial pe (O, I). Operatorul $\varphi_p : I^* \to \mathcal{P}^*(O^*)$ dat de $\varphi_q(q) = O^{\varphi}_{p,q} \forall q \in I^*$ (vezi teorema II.10.5) se numește *starea operatorului φ în cuvîntul $p \in I^*$.*

La fel ca și în cazul operatorilor determiniști are loc:

Teorema II.10.6. *Stările unui operator nedeterminist semisecvențial (secvențial) sînt operatori nedeterminiști semisecvențiali (secvențiali).*

Demonstrația este aceeași ca la teorema II.10.2. ■

Teorema II.10.7. *Orice operator φ nedeterminist secvențial pe (I, O) este realizabil într-un automat determinist.*

Demonstrație. Fie automatul

$$M(A^{\varphi}) = [I, \mathcal{P}^*(S^{\varphi}), \mathcal{P}^*(O), F^{\varphi}, G^{\varphi}]$$

unde

$$S^{\varphi} = \{\varphi_p \mid p \in I^*\}, \quad F^{\varphi}(S_1, i) = \{\varphi_{pi} \mid \varphi_p \in S_1\}, \quad G^{\varphi}(S_1, i) = \{\varphi_p(i) \mid \varphi_p \in S_1\}.$$

Se arată prin inducție după $l(r)$ că

$$F^{\varphi}(S_1, r) = \{\varphi_{pr} \mid \varphi_p \in S_1\},$$

$$G^{\varphi}(S_1, r) = \{\varphi_{pi_1 \ldots i_s}(i) \mid \varphi_p \in S_1, \text{ dacă } r = i_1 \ldots i_s i\}.$$

Deoarece $F^{\varphi}(S_1, r) \in \mathcal{P}^*(S^{\varphi})$ și $G^{\varphi}(S_1, r) \in \mathcal{P}^*(O)$, $\forall S_1 \in \mathcal{P}^*(S^{\varphi})$ $\forall r \in I^*$, automatul $M(A^{\varphi})$ este determinist.

Vom arăta acum că operatorul φ nedeterminist secvențial este realizabil în automatul $M(A^{\varphi})$ prin starea $\{\varphi_e\} \in \mathcal{P}^*(S^{\varphi})$. Într-adevăr

$$\gamma_{\{\varphi_e\}}(p) = \gamma_{\{\varphi_e\}}(i_1 \dots i_n) = G^{\varphi}_{\{\varphi_e\}}(i_1)\, G^{\varphi}_{F^{\varphi}(\{\varphi_e\}, i_1)}(i_2) \dots G^{\varphi}_{F^{\varphi}(\{\varphi_e\}, i_1 i_2 \dots i_{n-1})}(i_n) =$$

$$= G^{\varphi}(\{\varphi_e\}, i_1)\, G^{\varphi}(F^{\varphi}(\{\varphi_e\}, i_1), i_2) \dots G^{\varphi}(F^{\varphi}(\{\varphi_e\}, i_1 i_2 \dots i_{n-1}), i_n) =$$

$$= \varphi_e(i_1)\, \varphi_{i_1}(i_2) \dots \varphi_{i_1 i_2 \dots i_{n-1}}(i_n) = \varphi(i_1 i_2 \dots i_n) = \varphi(p),$$

deoarece $\varphi_e(i_1) = \varphi(i_1)$.

În șirul de egalități de mai sus avem produse de elemente din $\mathcal{P}^*(O)$, deci de complexe din O^*. ■

Observația II.10.8. Automatul $M(A^{\varphi})$ din teorema precedentă este macroautomatul automatului nedeterminist $A^{\varphi} = [I, S^{\varphi}, O, f^{\varphi}, g^{\varphi}]$, unde $f^{\varphi}(s, i) = F^{\varphi}(\{s\}, i)$, $g^{\varphi}(s, i) = G^{\varphi}(\{s\}, i)$.

Mai remarcăm că operatorul φ nedeterminist secvențial este realizabil și în automatul A^{φ}, în sensul definiției II.10.7 prin mulțimea de stări $\{\varphi_e\}$

O clasă importantă de operatori pe semigrupuri este mulțimea operatorilor fără memorie.

Definiția II.10.10. Un *operator fără memorie* pe (I_1, I_2) este un operator semisecvențial φ cu proprietatea $|S^{\varphi}| = 1$, adică cu memoria egală cu zero (vezi definiția II.10.5).

Teorema II.10.8. *Un operator secvențial φ pe (I_1, I_2) este fără memorie dacă și numai dacă este un homomorfism între semigrupurile I_1^*, I_2^*.*

Demonstrație. Fie φ un operator secvențial, fără memorie. Atunci $\forall p, q \in I_1^*$, $\varphi(pq) = \varphi(p)\, \Psi(q)$ unde $S^{\varphi} = \{\Psi\}$. Luînd $p = e$, obținem $\varphi(q) = \varphi(e)\Psi(q) = e\Psi(q) = \Psi(q)$. Deci $\varphi(pq) = \varphi(p)\, \varphi(q)$, prin urmare φ este un homomorfism.

Reciproc, fie φ un homomorfism. Atunci $\varphi(pq) = \varphi(p)\, \varphi(q)\ \forall p, q \in I_1^*$. Urmează $\varphi_p(q) = \varphi(q)$, $\forall p \in I_2^*$, deci $|S^{\varphi}| = 1$. ■

În sfîrșit vom atașa unui operator secvențial determinist un graf, ceea ce în anumite cazuri facilitează studiul unor proprietăți ale operatorului.

Definiția II.10.11. *Graful atașat operatorului secvențial* φ pe (I, O) este graful

$$\mathfrak{G}^{\varphi} = \left(\bigcup_{j \in N}{}' O_j, \Gamma^{\varphi}, \mu^{\varphi}\right)$$

unde

$$O_j = O, \ \forall j \in N^* \quad \text{și} \quad O_0 = \{e\}.$$

Apoi:

$$\Gamma^{\varphi}(o) = \{o' / \exists p \in I^*, \ i \in I, \ o' = \varphi(i) \wedge \varphi(p) = o_1 o_2 \dots o_{l(p)-1} o\},$$

$$\mu^{\varphi}((o, o')) = i, \quad \text{unde} \quad o' = \varphi_p(i) \quad \text{și} \quad o' \in \Gamma(o).$$

Observația II.10.9. Graful atașat unui operator secvențial este un *arbore* deoarece mulțimea stărilor fiind reuniunea disjunctă a mulțimilor O_t (exemplare ale mulțimii O) nu putem avea cicluri *.

Într-adevăr, la momentul t, simbolul din alfabetul O produs de operator este conceput ca aparținînd mulțimii O_t.

Rădăcina arborelui este cuvîntul nul din semigrupul O^*.

Observația II.10.10. Fie un arbore $\mathfrak{G} = (V, \Gamma, \mu^{\mathfrak{G}})$ unde $\mu^{\mathfrak{G}}$ este o funcție de marcare $\mu^{\mathfrak{G}} : V \times V \to I$. Putem atașa acestui arbore un operator secvențial pe (I, V). Astfel, dacă $p = i_1 i_2, \ldots, i_m$ este marcajul drumului (v_0, v_1), (v_1, v_2), ..., (v_{m-1}, v_m), operatorul $\varphi^{\mathfrak{G}}$ definit prin $\varphi^{\mathfrak{G}}(i_1 \ldots i_m) = v_1 \ldots v_m$ este un operator secvențial așa cum se constată imediat și, în plus $\mathfrak{G}^{\varphi^{\mathfrak{G}}} = \mathfrak{G}$. Menționăm că aici v_0 este vîrful arborelui și va fi interpretat drept cuvîntul nul din semigrupul V^*.

§ II.11. PROPRIETĂȚI SPECTRALE ALE AUTOMATELOR DETERMINISTE FINITE ȘI ALE OPERATORILOR SECVENȚIALI DETERMINIȘTI

În acest paragraf vom presupune că alfabetele I și O care intervin sînt finite și vom nota cu **Secv** (I, O) mulțimea operatorilor secvențiali pe (I, O) și cu $\mathbf{Op}(I, O)$ mulțimea operatorilor pe (I, O).

Definiția II.11.1. Operatorii $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathbf{Op}(I, O)$ sînt *k-separabili* dacă $\exists p \in I^*$, $l(p) \leqslant k$ astfel ca $\varphi_1(p) \neq \varphi_2(p)$.

Observația II.11.1. Operatorii φ_1, φ_2, k-separabili sînt și k'-separabili pentru $\forall k' \geqslant k$.

Definiția II.11.2. Operatorii $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathbf{Op}$ (I,O) sînt *k-echivalenți* dacă $\varphi_1(p) = \varphi_2(p)$, $\forall p \in I^*$, $l(p) \leqslant k$. Vom nota $(\varphi_1, \varphi_2) \in \rho_k^{\varphi}$.

Observația II.11.2. Relația de k-echivalență a operatorilor este complimentarea relației de k-separabilitate și $\rho_k^{\varphi} \leqslant \rho_{k-1}^{\varphi}$.

Fie acum mulțimea $\mathbf{Secv}(I, O)/\rho_k^{\varphi}$. Este clar că numărul operatorilor din **Secv** (I, O) doi cîte doi k-separabili este dat de $|\mathbf{Secv}(I, O)/\rho_k^{\varphi}|$.

Definiția II.11.3. *Spectrul de separabilitate al perechii de alfabete* (I, O) este aplicația $\boldsymbol{A}_{(I,O)} : N \to N$, definită prin $\boldsymbol{A}_{(I,O)}(k) = |\mathbf{Secv}(I, O)/\rho_k^{\varphi}|$, $\forall k \in N$.

---

* Un ciclu într-un graf $\mathfrak{G} = (V, \Gamma)$ este o succesiune de vîrfuri $\{v_i \mid i = \overline{1, m}\}$ astfel ca $(v_i, v_{i+1}) \in \Gamma \cup \Gamma^{-1}$ pentru $i = \overline{0, m}$ și $v_{m+1} = v_0$.

Teorema II.11.1. *Fie* $|I| = m$, $|O| = n$. *Atunci*

$$\boldsymbol{A}_{(I,\,O)}(k) \leqslant n^{(m^k)}, \quad \textit{unde} \quad (m^k) = m + \ldots + m^k.$$

Demonstrație. Vom proceda prin inducție după k. Să observăm mai întîi că mulțimea aplicațiilor $\Psi : I^h \to O$ conține n^{m^h} elemente. Pentru $k = 1$ există n^m elemente distincte în mulțimea aplicațiilor de la I la O și deci există cel mult n^m operatori 1—separabili.

Să presupunem teorema adevărată pentru $k - 1$ adică presupunem că numărul claselor de echivalență ρ^{φ}_{k-1} este cel mult $n^{(m^{k-1})}$ și să arătăm că numărul claselor de echivalență după relația ρ^{φ}_{k} este cel mult $n^{(m^k)}$. Să observăm că fiecare clasă de echivalență ρ^{φ}_{k-1} se împarte în cel mult n^{m^k} clase de echivalență după relația ρ^{φ}_{k}. Într-adevăr, fie $(\Psi_1, \Psi_2) \in \rho^{\varphi}_{k-1}$. Atunci, $\forall p \in I^{*(k-1)}$, $\Psi_1(p) = \Psi_2(p)$. Fie acum $p \in I^{(k-1)}$. Se poate ca $\Psi_1(pi) = \Psi_2(pi)$ $\forall i \in I$, sau să existe un $i \in I$ astfel ca $\Psi_1(pi) \neq \Psi_2(pi)$. Avem $(\Psi_1, \Psi_2) \notin \rho^{\varphi}_{k}$ dacă și numai dacă $\Psi_{1p}(i) = \Psi_{2p}(i)$ pentru un $i \in I$. Prin urmare fiecare clasă de echivalență după ρ^{φ}_{k-1} conține cel mult n^{m^k} clase de echivalență după relația ρ^{φ}_{k}, deci $\boldsymbol{A}_{(I,\,O)}(k) \leqslant n^{m^k} \boldsymbol{A}_{(I,\,O)}(k-1) \leqslant n^{(m^k)}$. ■

Definiția II.11.4. *Spectrul de separabilitate al unui operator* $\varphi \in \mathbf{Secv}\ (I, O)$ este aplicația $\boldsymbol{A}_{\varphi} : N \to N$ dată prin: $\boldsymbol{A}_{\varphi}(k) = |S^{\varphi}/\rho^{\varphi}_{k}|$.

Observația II.11.3. Spectrul de separabilitate este o funcție nedescrescătoare, deoarece $\rho^{\varphi}_{k-1} \geqslant \rho^{\varphi}_{k}$ și satisface la următoarele condiții:

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{A}_{\varphi}(0) = 1, \\ &\boldsymbol{A}_{\varphi}(k) \leqslant \boldsymbol{A}_{(I,O)}(k), \quad k \in N. \end{aligned} \tag{II.11.1}$$

Mai mult $\boldsymbol{A}_{\varphi}(k)$ este majorat de $M(\varphi) + 1$, unde $M(\varphi)$ este memoria operatorului φ (vezi definiția II.10.5).

Relația de k-echivalență a operatorilor ne conduce la introducerea unei relații de echivalență pe I, similară cu relația ν a lui Nerode (vezi definiția II.9.1).

Definiția II.11.5. *Cuvintele* $p, q \in I^*$ *sînt k-echivalente față de* φ, $(p, q) \in \nu_k$, dacă și numai dacă $(\varphi_p, \varphi_q) \in \rho^{\varphi}_{k}$.

Cuvintele p *și* q *sînt echivalente față de* φ, $(p, q) \in \nu$ dacă și numai dacă $(\varphi_p, \varphi_q) \in \rho^{\varphi}$.

Observația II.11.4. Avem $\nu_{k-1} \geqslant \nu_k$ și din $(p, q) \in \nu_k$ urmează $(pr, qr) \in \nu_{k-l(r)}$, $\forall r \in I^*$, $l(r) \leqslant k$.

Observația II.11.5. Mulțimea cuvintelor $p \in I^*$ de lungime cel mult egală cu k va fi notată cu I^{*k}, ea conține $1 + m + \ldots + m^k$ elemente. Avem $|I^{*k}| \leqslant 2m^k$.

Definiția II.11.6. *Spectrul de accesibilitate al unui operator* $\varphi \in \mathbf{Secv}(I, O)$ este aplicația $\boldsymbol{B}_{\varphi} : N \to N$ definită prin $\boldsymbol{B}_{\varphi}(k) = |I^{*k}/\nu|$.

Observația II.11.6. Spectrul de accesibilitate este o funcție nedescrescătoare, deoarece $I^{*(k-1)} \subseteq I^{*k}$ și satisface la următoarele condiții

$$\boldsymbol{B}_\varphi(0) = 1$$

(II.11.2)

$$\boldsymbol{B}_\varphi(k) \leqslant \frac{m^{k+1} - 1}{m - 1}.$$

Mai mult $\boldsymbol{B}_\varphi(k) \leqslant M(\varphi) + 1$, unde $M(\varphi)$ este memoria operatorului φ.

Evaluările din formulele (II.11.1, 2) nu pot fi ameliorate așa cum rezultă din considerarea următoarelor exemple.

Exemplul II.11.1. Fie $\mathfrak{G}$ un arbore marcat cu alfabetul $I, |I| = m$, a cărui mulțime de vîrfuri este $\bigcup'_{j \in N} O_j, O_j = O, \forall j \in N^*$ și $O_0 = \{e\}, |O| = n$. Să presupunem că prin vîrful arborelui $\mathfrak{G}$ trec două drumuri compuse din arcele $\{(o_0, o_1), (o_1, o_2) \ldots, (o_{j-1}, o_j), (o_0, o'_1)\ (o'_1, o'_2), \ldots, (o'_{j-1}, o'_j)\}$. Operatorul secvențial atașat $\varphi^{\mathfrak{G}}$ (vezi observația II.10.10) are stările $\varphi_{i_1 \ldots i_j}$ și $\varphi_{i'_1 \ldots i'_j}$ egale unde $i_1 \ldots i_j$ și $i'_1 \ldots i'_j$ sînt marcajele care corespund respectiv drumurilor considerate. Prin urmare $\boldsymbol{A}_{\varphi\mathfrak{G}}(j) < n^{(m^j)}$.

Este clar că dacă arborele $\mathfrak{G}$ nu ar avea nici un ciclu din $p \neq q$ urmează $\varphi_p^{\mathfrak{G}} \neq \varphi_q^{\mathfrak{G}}$ și deci $\boldsymbol{A}_{\varphi\mathfrak{G}}(k) = n^{(m^k)}$.

Exemplu II.11.2. Fie operatorul φ pe (I_1, I_2) unde $I_1 = \{0, 1\}$, $I_2 = I_1^*$, definit prin $\varphi(p) = \varphi(i_1 \ldots i_n) = (i_1)\ (i_1 i_2)\ (i_1 i_2 i_3) \ldots (i_1 i_2 \ldots i_n) \in (I_1^*)^*$. Se verifică imediat că operatorul φ este secvențial și că pentru $p \neq q$, $\varphi_p(r) \neq \varphi_q(r)$, $\forall r$, adică $\varphi_p \neq \varphi_q$. Astfel numărul elementelor mulțimii I_1^{*k}/ν este egal cu numărul elementelor I_1^{*k}, adică $\boldsymbol{B}_\varphi(k) = 2^{k+1} - 1$: marginea superioară din inegalitatea (II.11.2) este efectiv atinsă pentru operatorul φ considerat, în cazul acesta $m = 2$.

În ceea ce privește majorările inferioare din formulele (II.10.1, 2) avem următorul rezultat:

Teorema II.11.2. $\boldsymbol{A}_\varphi(k) = \boldsymbol{B}_\varphi(k) = 1$, $\forall k \in N$, *dacă și numai dacă* φ *este un operator fără memorie.*

Demonstrație. Fie φ un operator fără memorie. Avem $|S^\varphi| = 1$, de unde $\boldsymbol{A}_\varphi(k) = \boldsymbol{B}_\varphi(k) = 1$, $\forall k \in N$.

Reciproc, să presupunem că $\boldsymbol{A}_\varphi(k) = 1$, $\forall k \in N$. Atunci $\forall p, q \in I^*$, $\varphi_p(r) = \varphi_q(r)$, $\forall r \in I^*$, $l(r) \leqslant k$, $\forall k \in N$, de unde $\varphi_p = \varphi_q$ și $|S^\varphi| = 1$.

Dacă presupunem acum $\boldsymbol{B}_\varphi(k) = 1$, atunci pentru $\forall p, q \in I^*$, $\max(l(p), l(q)) \leqslant k$, $\forall k \in N$, are loc $\varphi_p(r) = \varphi_q(r)$, $\forall r \in I$, de unde $\varphi_p = \varphi_q$ și deci $|S^\varphi| = 1$ ■.

Consecința II.11.1. Avem $\boldsymbol{A}_\varphi(k) = 1$, $\forall k \in N$ dacă și numai dacă $\boldsymbol{B}_\varphi(k) = 1$, $\forall k \in N$.

Exemplul II.11.3. Fie $A = [I, S, O, f, g]$ un automat determinist cu

$$I = \{i, i'\},\ S = \{s_1, s_2, \ldots, s_h\},\ O = \{0, 1\},\ f(s_j, i) = f(s_j, i') = s_{j+1}$$

pentru

$$j = \overline{1, h-1} \quad \text{și} \quad f(s_h, i) = f(s_h, i') = s_1,$$

iar

$$g(s_j, i) = g(s_j, i') = 0,\ j = \overline{1, h-1}$$

și

$$g(s_h, i) = g(s_h, i') = 1.$$

Pentru operatorul generat de starea s_1, $\gamma_{s_1}(p)$ avem $\boldsymbol{A}_\varphi(k) = \boldsymbol{B}_\varphi(k) = k+1$ pentru $k = \overline{0, h-1}$ și $\boldsymbol{A}_\varphi(k) = \boldsymbol{B}_\varphi(k) = h+1$ pentru $k \geqslant h$.

Graful automatului considerat aici este dat în fig. II.11.1.

Fie un cuvînt $q \in I^*$, $q = i_1 i_2$ și $p \in I^*$. Avem $\varphi(pq) = \varphi(p)\,\varphi_p(q)$. Vom analiza în continuare forma cuvîntului $\varphi(pq)$.

Dacă $l(pq) \leqslant h-1$ atunci $\varphi(pq) = \underbrace{0 \ldots 0}_{l(pq)}$ și $\varphi(p) = \underbrace{0 \ldots 0}_{l(p)}$ și deci $\varphi_p(q) = 00$.

Dacă $l(pq) = h$, $\varphi(pq) = \underbrace{0 \ldots 01}_{h-1}$, $\varphi(p) = \underbrace{0 \ldots 0}_{h-2}$ și $\varphi_p(q) = 01$.

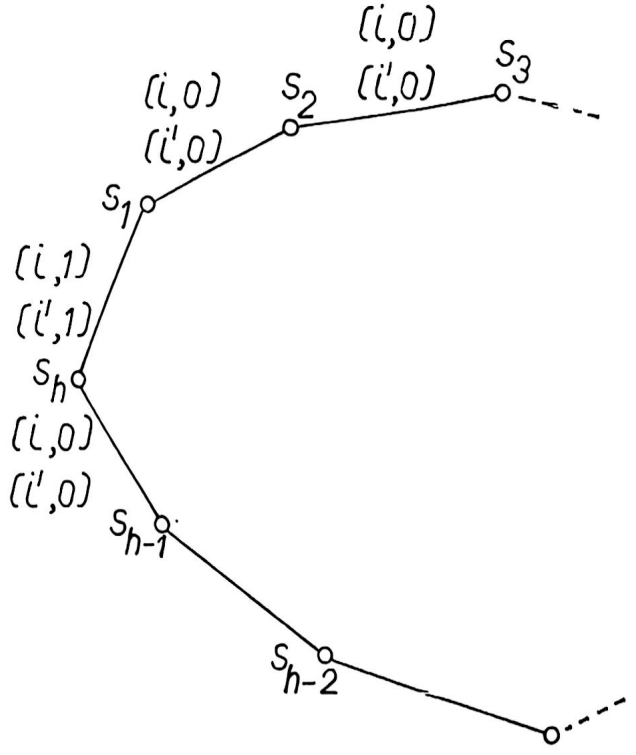


Fig. II.11.1

În fine, dacă $l(pq) = h + 1$, $\varphi(pq) = \underbrace{0 \ldots 0\,1\,0}_{h+1}$ și $\varphi(p) = \underbrace{0 \ldots 0}_{h-2}$, iar $\varphi_p(q) = 10$.

Se constată imediat că dacă $l(pq) > h + 1$, $\varphi_p(q)$ nu poate avea decît una din formele de mai sus, adică 00, 01 și 10, deci mulțimea S^φ se împarte în trei clase de echivalență după relația ρ_2^φ.

Pe de altă parte se constată imediat că $|I^{*2}/\nu| = 3$.

Analog se arată că $\boldsymbol{A}_\varphi(k) = \boldsymbol{B}_\varphi(k) = k + 1$ pentru $k = 0$, iar $\boldsymbol{A}_\varphi(k) = \boldsymbol{B}_\varphi(k) = h + 1$ pentru $k \geqslant h$.

Următorul exemplu ne arată că există operatori cu memoria infinită pentru care funcțiile spectrale pot crește oricît de mult.

Exemplul II.11.4. [Trahtenbrot B.A. și Barzdin Ia. M. [1]].

Fie operatorul φ pe $(\{0, 1\}, \{0, 1\}]$ definit prin $\varphi(i_1 \ldots i_n) = o_1 \ldots o_n$, unde:

$$o_j = \begin{cases} 1, & \text{dacă } n_1(i_1 \ldots i_j) > n_0(i_1 \ldots i_j) \\ 0, & \text{în caz contrar.} \end{cases}$$

Aici $n_1(p)$, $n_0(p)$ reprezintă numărul de simboluri egale cu 1, respectiv cu 0, în cuvîntul p.

Se constată imediat că operatorul φ este secvențial.

Să observăm că $\varphi_p = \varphi_q$ dacă și numai dacă $n_1(p) - n_0(p) = n_1(q) - n_0(q)$, de unde urmează că operatorul φ are memoria infinită.

Să presupunem că pentru un cuvînt $p \in \{0, 1\}^*$, $n_1(p) - n_0(p) > k$.

Atunci $\forall r \in \{0, 1\}^*$, $l(r) \leqslant k$, $n_1(pr) > n_0(pr)$, deci $\varphi_p(r) = \underbrace{1 \ldots 1}_{l(r)}$ și toți operatorii φ_p cu $n_1(p) - n_0(p) > k$ sînt doi cîte doi în relația ρ_k^φ.

Analog se arată că toți operatorii φ_p cu $n_1(p) - n_0(p) \leqslant -k$ sînt doi cîte doi în relația ρ_k^φ.

În sfîrșit, dacă $-k < n_1(p_j) - n_0(p_j) \leqslant k$, $j = 1, 2$ și $n_1(p_1) - n_0(p_1) = n_1(p_2) - n_0(p_2)$ atunci $(\varphi_{p_1}, \varphi_{p_2}) \in \rho_k^\varphi$. Prin urmare $\boldsymbol{A}_\varphi(k) = |S^\varphi/\rho_k^\varphi| = 2k + 2$.

Să calculăm acum spectrul de accesibilitate.

Fie $j_1 j_2 \in [-k, k + 1]$, $j_1 < j_2$. Fie și $p_1, p_2 \in \{0, 1\}^*$, $\max(l(p_1), l(p_2)) \leqslant k$ cu $n_1(p_1) - n_0(p_1) = j_1$ și $n_1(p_2) - n_0(p_2) = j_2$. Atunci există $r \in \{0, 1\}^*$ pentru care $\varphi_{p_1}(r) \neq \varphi_{p_2}(r)$.

Într-adevăr nu avem decît să luăm un cuvînt $r \in \{0,1\}^*$ cu $n_1(r) - n_0(r) = -j_1$.

Deoarece pentru $l(p_j) \leqslant k$, $n_1(p_j) - n_0(p_j) \in [-k, k]$, $\boldsymbol{B}_\varphi(k) = 2k + 1$.

Noțiunile de spectre de accesibilitate și de separabilitate pot fi extinse pentru automate.

Definiția II.11.7. *Spectrul de accesibilitate al automatului A în stare s_0* este aplicația $\boldsymbol{B}_{A(s_0)}: N \to N$ dată prin $\boldsymbol{B}_{A(s_0)}(h) = |\{s \mid \exists p \in I^{*k}, f(s_0, p) = s\}|$.

Observația II.11.7. Avem $\boldsymbol{B}_{A(s_0)}(k) \geqslant 1, \forall k \in N$, deoarece cel puțin $s_0 \in \{s \mid \exists p \in p \in I^{*k}, f(s_0, p) = s\}$, luînd $p = e$. Funcția $\boldsymbol{B}_{A(s_0)}(k)$ este nedescrescătoare.

Observația II.11.8. Spectrul de accesibilitate al automatului A în starea s_0 poate fi considerat și ca o caracteristică a semiautomatului atașat $S(A)$ (vezi definiția II.1.9), deoarece în definiția II.11.7. nu intervine funcția de ieșire.

Legătura dintre spectrul de accesibilitate al automatului A în stare s_0 și spectrul de accesibilitate al operatorului secvențial realizat în automatul A prin starea s_0, este dată de:

Teorema II.11.3. *Pentru* $\forall k \in N^*$, *are loc inegalitatea* $\boldsymbol{B}_{A(s_0)}(k) \geqslant \boldsymbol{B}_{\gamma_{s_0}}(k)$. *Semnul egal se obține dacă automatul A este redus.*

Demonstrație. Să presupunem că $\boldsymbol{B}_{\gamma_{s_0}}(k) = \alpha$. Atunci există cuvintele $p_1, \ldots, p_\alpha \in I^{*k}$ cu proprietatea

$$\forall p_{j_1}, p_{j_2}, \quad 1 \leqslant j_1 < j_2 \leqslant \alpha, \quad (\gamma_{s_0})_{p_{j_1}} \neq (\gamma_{s_0})_{p_{j_2}},$$

ceea ce conform cu formula (II.10.3) revine la $\gamma_f(s_0, p_{j_1}) \neq \gamma_f(s_0, p_{j_2})$. De aici urmează că stările $(f(s_0, p_{j_1}), f(s_0, p_{j_2})) \notin \rho$, deci cu atît mai mult $f(s_0, p_{j_1}) \neq f(s_0, p_{j_2})$. Am obținut $\boldsymbol{B}_{\gamma_{s_0}}(k) \leqslant \boldsymbol{B}_{A(s_0)}(k)$.

Să presupunem acum că automatul A este redus și fie $\boldsymbol{B}_{A(s_0)}(k) = \beta$. Atunci există β stări accesibile din starea s_0 prin cuvinte $p_1, \ldots, p_\beta$ de lungime cel mult k, stări distincte între ele și neechivalente, automatul A fiind redus. De aici urmează că $\forall j_1, j_2$, $1 \leqslant j_1 < j_2 \leqslant \beta$, $(p_{j_1}, p_{j_2}) \notin \nu$ și deci $\boldsymbol{B}_{\gamma_{s_0}}(k) \geqslant \beta$. Deci pentru automate reduse avem $\boldsymbol{B}_{A(s_0)}(k) = \boldsymbol{B}_{\gamma_{s_0}}(k)$. ■

Consecința II.11.2. Operatorul secvențial φ este nerealizabil în automatul A prin starea s_0, dacă $\exists k \in N$, astfel ca $\boldsymbol{B}_\varphi(k) > \boldsymbol{B}_{A(s_0)}(k)$.

Definiția II.11.8. *Spectrul de separabilitate al unui automat A* este aplicația $\boldsymbol{A}_A : N \to N$, dată prin $\boldsymbol{A}_A(k) = |S/\rho_k|$.

Observația II.11.9. Funcția $\boldsymbol{A}_A$ este nedescrescătoare și $\boldsymbol{A}_A(k) \leqslant n^{(m^k)}$, $\forall k \in N$ pentru automate cu $|I| = m$ și $|O| = n$, deoarece $|S/\rho_k| \leqslant |\operatorname{Secv}(I, O)/\rho_k^\varphi|$.

Teorema II.11.4. *Avem* $\boldsymbol{A}_A(k) \geqslant \boldsymbol{A}_{\gamma_s}(k)$ $\forall k \in N$, $s \in S$. *Egalitatea are loc cînd automatul A este conex de starea s.*

Demonstrație. Fie $\boldsymbol{A}_{\gamma_s}(k) = \alpha$. Atunci există cuvintele $p_1, \ldots, p_\alpha$ pentru care

$$\forall p_{j_1}, p_{j_2}, 1 \leqslant j_1 < j_2 \leqslant \alpha, (\gamma_{f(s, p_{j_1})}, \gamma_{f(s, p_{j_2})}) \notin \rho_k^\varphi.$$

De aici urmează că pentru stările $f(s, p_{j_1}), f(s, p_{j_2})$ avem $(f(s, p_{j_1}), f(s, p_{j_2})) \notin \rho_k$, prin urmare $\boldsymbol{A}_A(k) \geqslant \boldsymbol{A}_{\gamma_s}(k)$.

Să presupunem acum că automatul A este conex de starea s și fie $\boldsymbol{A}_A(k) = \alpha$. Există $s_1, \ldots, s_\alpha \in S$, astfel ca pentru $\forall s_{j_1}, s_{j_2}$, $1 \leqslant j_1 < j_2 \leqslant \alpha$, $(s_{j_1}, s_{j_2}) \notin \rho_k$ și prin urmare $\exists p \in I^{*k}$ cu $\gamma_{s_{j_1}}(p) \neq \gamma_{s_{j_2}}(p)$, dar atunci avem și $\gamma_{f(s, p_{j_1})}(p) \neq$

$\neq \gamma_{f(s,\, p_{j_2})}(p)$, deoarece în baza proprietății de conexiune, $\exists p_{j_1}, p_{j_2} \in I^*$ cu $s_{j_1} = f(s, p_{j_1})$ și $s_{j_2} = f(s, p_{j_2})$. Deci $\boldsymbol{A}_{\gamma_s}(k) \geqslant A_A(k)$.

Astfel pentru automatul A conex de starea s, avem $\boldsymbol{A}_{\gamma_s}(k) = \boldsymbol{A}_A(k)$, $\forall k \in N$. ■

Consecința II.11.3. Operatorul secvențial φ este nerealizabil în automatul A dacă $\exists k \in N$ cu $\boldsymbol{A}_\varphi(k) > \boldsymbol{A}_A(k)$.

Observația II.11.10. Spectrul de separabilitate este o caracteristică a unei clase de automate echivalente, în sensul că două automate echivalente au același spectru de separabilitate.

Într-adevăr, fie $A_1 \sim A_2$, $s_1, s_1' \in S_1$, $s_2, s_2' \in S_2$ cu $(s_1, s_1') \in \rho_k$, $(s_1, s_2) \in \rho$, $(s_1', s_2') \in \rho$. Conform formulei (II.5.5), $(s_1, s_2) \in \rho_k$, $(s_1', s_2') \in \rho_k$ și utilizînd tranzitivitatea relației ρ_k găsim $(s_1', s_2') \in \rho_k$ și reciproc.

Automatele echivalente au, în general, spectre de accesibilitate diferite.

Observația II.11.11. Dacă $A_1 > A_2$ atunci $\boldsymbol{A}_{A_1} \geqslant \boldsymbol{A}_{A_2}$.

Observația II.11.12. Izomorfismul de automate păstrează spectrele de separabilitate și accesibilitate (exercițiu!).

Vom ilustra consecința II.11.3 prin:

Exemplul II.11.5. Automatul unidimensional al lui Neumann este alcătuit dintr-o bandă nemărginită la dreapta, împărțită în celule numerotate. Prima celulă joacă un rol special, ea fiind în comunicație cu mediul ambiant printr-un canal de intrare la care se aplică simbolii din alfabetul I și un canal de ieșire care generează simboli din alfabetul O (vezi fig. II.11.2.)

Celulele benzii se pot găsi într-o stare din mulțimea $S_0 = \{s_0, s_1, \ldots, s_\alpha\}$. Starea s_0 o vom numi stare pasivă.

Fie $s(j, t)$ starea celulei j la momentul t. Comportarea primei celule este descrisă de funcțiile $\Psi_1 : S_0 \times S_0 \times I \to S_0$ și $\Phi_1 : S_0 \times S_0 \times I \to O$, unde $s(1, t+1) = \Psi_1(s(1, t), s(2, t), i(t))$ iar $o(t) = \Phi_1(s(1, t), s(2, t), i(t))$. Pentru restul celulelor comportarea este descrisă de funcția $\Psi_2 : S_0 \times S_0 \times S_0 \to S_0$ cu $s(j, t+1) = \Psi_2(s(j-1, t)\, s(j, t), s(j+1, t))$ și cu proprietatea $\Psi_2(s_0, s_0, s_0) = s_0$.

Mulțimea S a stărilor în care se poate găsi dispozitivul descris mai sus, este formată din șiruri, adică

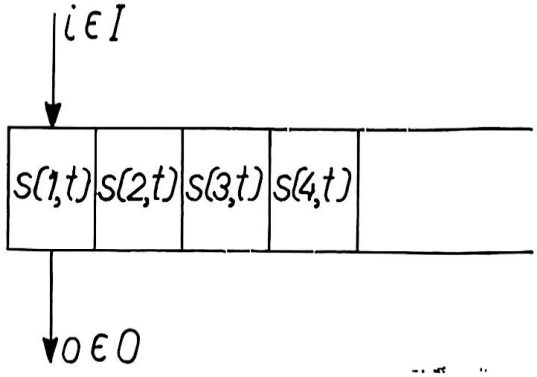


Fig. II.11.2

$$S = \{\mathbf{s}(t) \mid \mathbf{s}(t) = \{s(n, t)\}_{n \in N^*},$$

$$\exists n_0(t),\ n_1 \geqslant n_0(t) \Rightarrow s(n_1, t) = s_0\}.$$

Mulțimea S este evident numărabilă.

Dispozitivul unidimensional al lui Neuman poate fi descris ca un automat $A = [I, S, O, f, g]$ unde

$$f(\mathbf{s}(t), i(t)) = \{\Psi_1(s(1, t), s(2, t), i(t)), \Psi_2(s(1, t), s(2, t), s(3, t)), \ldots\},$$

și

$$g(s(t), i(t)) = \Phi_1(s(1, t), s(2, t), i(t)).$$

Să găsim o majorare a spectrului de separabilitate pentru automatul A.

Fie $s', s'' \in S$ cu $s'(j, t) = s''(j, t)$, pentru $j = \overline{1, k}$. Aceste două stări sînt k-echivalente și deci există cel mult α^k stări care nu sînt două cîte două în relația ρ_k.

Astfel $\boldsymbol{A}_A(k) \leqslant \alpha^k$, $\forall k \in N$.

De aici rezultă că există operatori secvențiali care nu pot fi realizați în automatul A, ca de pildă operatorul considerat în exemplul II.11.1.

Ne vom ocupa în continuare de unele proprietăți ale funcțiilor spectrale ale automatelor (și implicit ale operatorilor secvențiali, deoarece pentru orice operator secvențial există automate în care el poate fi realizat cu menținerea funcțiilor spectrale).

Să observăm mai întîi că deoarece funcțiile spectrale sînt nedescrescătoare, diferențele finite de ordinul 1, $\Delta \boldsymbol{A}_A(k) = \boldsymbol{A}_A(k+1) - \boldsymbol{A}_A(k)$ și $\Delta \boldsymbol{B}_A(k) = \boldsymbol{B}_A(k+1) - \boldsymbol{B}_A(k)$ sînt nenegative. Mai mult, are loc:

Teorema II.11.5. *Dacă* $\Delta \boldsymbol{C}(k) = 0$ *atunci* $\Delta \boldsymbol{C}(k+1) = 0$, $\forall k \in N$, *unde* $\boldsymbol{C}$ *este oricare din funcțiile* $\boldsymbol{A}_A$, $\boldsymbol{B}_A$.

Demonstrație. Avem $\Delta \boldsymbol{A}_A(k) \neq 0$, dacă și numai dacă există cel puțin o pereche de stări strict $(k+1)$-separabile (vezi definiția II.5.3), iar $\Delta \boldsymbol{B}_A(k) \neq 0$, dacă și numai dacă există cel puțin o stare strict $(k+1)$-accesibilă (vezi definiția II.4.2).

Dacă $\Delta \boldsymbol{A}_A(k) = 0$ atunci nu există nici o pereche de stări strict $(k+1)$-separabile și conform cu teorema II.5.6, nu există nici o pereche de stări strict $(k+2)$-separabile și deci $\Delta \boldsymbol{A}_A(k+1) = 0$. Analog, dacă $\Delta \boldsymbol{B}_A(k) = 0$, atunci nu există nici o stare strict $(k+1)$-accesibilă și conform cu observația II.4.2 nu există nici o stare strict $(k+2)$-accesibilă, deci $\Delta \boldsymbol{B}_A(k+2) = 0$. ■

Consecința II.11.4. Dacă $\forall k \in N$, $\Delta \boldsymbol{C}(k) \neq 0$, funcția $\boldsymbol{C}$ este strict crescătoare. Dacă $\exists k \in N$, astfel ca $\Delta \boldsymbol{C}(k) = 0$, funcția $\boldsymbol{C}$ este strict crescătoare pe intervalul $[0, k]$ și apoi se menține constantă luînd mereu valoarea $\boldsymbol{C}(k)$. În particular pentru $k = 0$, $\boldsymbol{C}(k) = 1$, pentru $\forall k \in N$.

Consecința II.11.5. Pentru automate reduse cu memoria infinită funcțiile spectrale sînt strict crescătoare și $\boldsymbol{C}(k) \geqslant k+1$ unde $\boldsymbol{C}$ este oricare din funcțiile $\boldsymbol{A}_A$ sau $\boldsymbol{B}_A$.

Observația II.11.13. Unele rezultate din §5, ca de exemplu teorema II.5.4 pot fi obținute drept consecințe ale teoremei II.11.5.

§ II.12. CARACTERISTICI NUMERICE ALE AUTOMATELOR DETERMINISTE FINITE ȘI ALE OPERATORILOR SECVENȚIALI

Definiția II.12.1. *Puterea de separabilitate a automatului A* este numărul $\boldsymbol{s}(A)$ dat de:

$$\boldsymbol{s}(A) = \min\{j \mid \rho_j = \rho\}.$$

Observația II.12.1. Din definiția precedentă rezultă că $\boldsymbol{s}(A)$ este cel mai mic număr j astfel că oricare două stări s_1 și s_2 neechivalente sînt j-neechivalente.

Observația II.12.2. Avem $\boldsymbol{s}(A) \leqslant |S| - 1$ (vezi teorema II.5.5).

Definiția II.12.2. *Puterea de separabilitate a operatorului* φ pe I_1, I_2) este numărul $\boldsymbol{s}(\varphi) = \boldsymbol{s}(A(\varphi))$, unde $A(\varphi) = [I_1, S_\varphi, I_2, f_\varphi, g_\varphi]$.

Definiția II.12.3. *Puterea de accesibilitate a unui automat A* în starea s_0 este cel mai mic număr j pentru care $f(s_0, I^{*j}) = f(s_0, I^*)$. Acest număr va fi notat cu $\boldsymbol{a}(A; s_0)$.

Observația II.12.3. Avem $\boldsymbol{a}(A; s_0) = \boldsymbol{a}(A'; s_0)$ unde $A' = [I, S', O, f', g']$. Aici $S' = f(s_0, I^*)$. $f' = f|_{S' \times I}$, $g' = g|_{S' \times I}$.

Definiția II.12.4. *Puterea de accesibilitate a unui operator* φ pe (I_1, I_2) este cel mai mare număr j pentru care $\exists p \in I_1^j$ astfel ca $\forall q \in I_1^{*(j-1)}$ să avem $(p, q) \notin \nu$(vezi definiția II.11.5).

Vom nota acest număr cu $\boldsymbol{a}(\varphi)$.

Teorema II.12.1. *Avem* $\boldsymbol{a}(\varphi) = \boldsymbol{a}(A(\varphi); \varphi_e)$.

Demonstrație. Fie $\alpha = \boldsymbol{a}(\varphi)$ și $\beta = \boldsymbol{a}(A(\varphi); \varphi_e)$. Avem $f_\varphi(\varphi_e, I^{*\beta}) = f_\varphi(\varphi_e, I^*)$ și deci $\forall\, p \in I^*$, $\exists\, q \in I^{*\beta}$ cu $\varphi_p = \varphi_q$ deci $(\varphi_p, \varphi_q) \in \rho^\varphi$, adică $(p, q) \in \nu$. De aici rezultă că β nu poate fi mai mic decît α, adică $\beta \geqslant \alpha$.

Să arătăm acum că $f_\varphi(\varphi_e, I^{*\alpha}) = f_\varphi(\varphi_e, I^*)$ de unde va rezulta $\alpha \geqslant \beta$.

În general $f_\varphi(\varphi_e, I^{*\alpha}) \subseteq f_\varphi(\varphi_e, I^*)$. Fie acum $f_\varphi(\varphi_e, I^*)$ și $l(p) > \alpha$. Ținînd seama de definiția II.12.4, $\exists\, p_1 \in I_1^{*(l(p)-1)}$ astfel ca $(p, p_1) \in \nu$, adică $\varphi_p = \varphi_{p_1}$, deoarece automatul $A(\varphi)$ este redus.

Dacă $l(p) - 1 \leqslant \alpha$, $\varphi_p \in f_\varphi(\varphi_e, I^{*\alpha})$. În caz contrar aplicăm raționamentul de mai sus lui p_1 și găsim un cuvînt $p_2 \in I_1^{*(l(p)-2)}$, $(p_2, p_1) \in \nu$, deci $\varphi_{p_2} = \varphi_{p_1}$. Dacă $l(p) - 2 \leqslant \alpha$ atunci $\varphi_p \in f_\varphi(\varphi_e, I^{*\alpha})$; în caz contrar aplicînd procedeul de mai sus obținem succesiv șirul de cuvinte $p_1, p_2, \ldots, p_n \ldots$ cu $l(p_n) = l(p) - n$.

Cum α este finit, după un număr finit de pași obținem un cuvînt p_m cu $l(p_m) \leqslant \alpha$, cu proprietatea $\varphi_{p_m} = \varphi_{p_{m-1}} = \ldots = \varphi_{p_1} = \varphi_p$ adică $\varphi_p \in f_\varphi(\varphi_e, I^{*\alpha})$.

Din inegalitățile de sens contrar urmează egalitatea $\alpha = \beta$. ■

Teorema II.12.2. *Dacă A este un automat redus în care operatorul* φ *este realizabil prin starea* s_0 *avem* $\boldsymbol{a}(\varphi) = \boldsymbol{a}(A; s_0)$.

Demonstrație. Deoarece $A > A(\varphi)$ există un subautomat A_1 al lui A cu $A_1 \sim A(\varphi)$ (vezi teorema II.6.1). Putem alege drept automat A_1 automatul A' din observația II.12.3, punînd $h(\varphi_p) = f(s_0, p)$ și procedînd ca în teorema II.6.1.

Automatele A' și $A(\varphi)$ fiind reduse și echivalente sînt izomorfe și deci $\boldsymbol{a}(A(\varphi); \varphi_e) = \boldsymbol{a}(A'; s_0)$, de unde $\boldsymbol{a}(\varphi) = \boldsymbol{a}(A; s_0)$ ținînd seama de observația II.12.3 și teorema II.12.1. ■

Teorema II.12.3. *Fie k cel mai mic număr natural pentru care $\Delta \boldsymbol{A}_A(k) = 0$, atunci $\mathbf{s}(A) = k$.*

Demonstrație. Dacă $\Delta \mathbf{A}_A(k) = 0$, atunci, ținînd seama de teorema II.11.5, $\boldsymbol{A}_A(k) = \boldsymbol{A}_A(k+1) = \ldots$, adică $|S/\rho_k| = |S/\rho_{k+1}| = \ldots$ de unde $\rho_k = \rho_{k+1} = \ldots = \rho$, k fiind cel mai mic număr cu această proprietate.

Prin urmare $k = \mathbf{s}(A)$. ■

Teorema II.12.4. *Fie k cel mai mic număr natural pentru care $\Delta \boldsymbol{B}_{A(s_0)}(k) = 0$; atunci $\boldsymbol{a}(A; s_0) = k$.*

Demonstrație. Din $\Delta \boldsymbol{B}_{A(s_0)}(k) = 0$ urmează $\mathbf{B}_{A(s_0)}(k) = \boldsymbol{B}_{A(s_0)}(k+1) = \ldots$ (vezi teorema II. 11.5), adică $\forall s \in f(s_0, I^*)$ avem $s \in f(s_0, I^{*k})$ și k este minim cu această proprietate, deci $k = \boldsymbol{a}(A; s_0)$. ■

Fie automatul $A = [I, S, O, f, g]$ cu $|I| = m \geqslant 2$, $|0| = n \geqslant 2$, $|S/\rho| = \varepsilon$. Are loc:

Teorema II.12.5. *Pentru $\mathbf{s}(A)$ avem*

$$\log_m \log_n \varepsilon - 1 \leqslant \mathbf{s}(A) \leqslant \varepsilon - 1. \tag{II.12.1}$$

Demonstrație. Utilizînd teorema II.5.4 avem $|S/\rho_j| \geqslant j + 1$ unde $j = \mathbf{s}(A)$. De aici avem (vezi definiția II.12.1), $|S/\rho| = |S/\rho_j|$ deci $\varepsilon \geqslant \mathbf{s}(A) + 1$.

Conform observației II.11.9 $\boldsymbol{A}_A(k) \leqslant n^{(m^k)}$, de unde $\boldsymbol{A}_A(\mathbf{s}(A)) \leqslant n^{(m^{\mathbf{s}(A)})}$. Apoi $\boldsymbol{A}_A(\mathbf{s}(A)) = \varepsilon$ (vezi demonstrația teoremei II.12.3), deci $\varepsilon \leqslant n^{(m^{\mathbf{s}(A)})} \leqslant n^{2m^{\mathbf{s}(A)}}$. Logaritmînd succesiv avem $\log_n \varepsilon \leqslant 2m^{\mathbf{s}(A)}$, $\log_m \log_n \varepsilon \leqslant \log_m 2 + \mathbf{s}(A)$.

Cum $m \geqslant 2$, $\log_m 2 \leqslant 1$ și deci

$$\log_m \log_n \varepsilon - 1 \leqslant \mathbf{s}(A).$$

Teorema II.12.6. *Fie A un automat conex de stare s_0. Atunci:*

$$\log_m \varepsilon - 1 \leqslant \mathbf{a}\ (A; s_0) \leqslant \varepsilon - 1. \tag{II.12.2}$$

Demonstrație. Într-adevăr, din $\mathbf{B}_{A(s_0)}(k) = |I^{*k}/\nu|$ urmează $\mathbf{B}_{A(s_0)}(k) \leqslant 1 + m + \ldots + m^k \leqslant 2m^k$. În particular, inegalitatea rămîne adevărată și pentru $k = \boldsymbol{a}(A; s_0)$.

Pe de altă parte $(p, q) \in \nu$ dacă și numai dacă $(f(s_0, p), f(s_0, q)) \in \rho$ și automatul fiind conex de starea s_0 aplicația $h: I^*/\nu \to S/\rho$ dată prin $h([p]) = [f(s_0, p)]$ este bijectivă deci $|I^*/\nu| = |S/\rho|$.

Conform cu demonstrarea teoremei II.12.4. avem:

$$\varepsilon = \boldsymbol{B}_{A(s_0)}(\boldsymbol{a}(A\,;\,(s_0)) \leqslant 2m^{\cdot(A;s_0)},$$

de unde prin logaritmare obţinem

$$\log_m \varepsilon - 1 \leqslant \boldsymbol{a}(A\,;\,s_0).$$

Apoi, din

$$1 = \boldsymbol{B}_{A(s_0)}(0) < \boldsymbol{B}_{A(s_0)}(1) < \ldots < \boldsymbol{B}_{A(s_0)}(\boldsymbol{a}(A\,;\,s_0) - 1) < \boldsymbol{B}_{A(s_0)}(\boldsymbol{a}(A\,;\,s_0)) = \varepsilon,$$

urmează

$$\boldsymbol{B}_{A(s_0)}(1) \geqslant 2,\ \ldots,\ \boldsymbol{B}_{A(s_0)}(\boldsymbol{a}(A\,;\,s_0)) \geqslant \boldsymbol{a}(A\,;\,s_0) + 1$$

sau

$$\boldsymbol{a}(A\,;\,s_0) \leqslant \varepsilon - 1. \blacksquare$$

Observaţia II.12.4. Evaluarea din formula II.12.2 subzistă şi în cazul în care automatul se bucură de proprietatea:

(P) $$\forall\, s \in S,\ \exists\, p \in I^*,\ (s, f(s_0, p)) \in \rho,$$

mai slabă decît proprietatea de conexiune a automatului de starea s_0.

§ II.13. EVENIMENTE ŞI REPREZENTAREA LOR ÎN AUTOMATE FINITE

Definiţia II.13.1. Un *eveniment* E pe un alfabet I este o parte a lui I^*. În cazurile extreme, $E = \varnothing$ sau $E = I^*$ obţinem *evenimentul imposibil*, respectiv *evenimentul cert* pe I.

Evenimentele mai sînt numite de unii autori *limbaje.*

Observaţia II.13.1. Faţă de operaţiile obişnuite de reuniune, intersecţie şi complementariere din teoria mulţimilor, mulţimea $\mathcal{P}(I^*)$ a evenimentelor pe I formează o algebră Boole.

Automatele considerate în continuare vor fi presupuse automate deterministe dacă nu se vor face alte precizări.

Definiţia II.13.2. *Evenimentul reprezentat* într-un automat iniţial $A = [I, S, O, f, g; s_0]$ *prin semnalul de ieşire* o este mulţimea $E = g_{s_0}^{-1}(o) \subseteq I^*$, iar orice $p \in E$ va fi numit *cuvînt acceptat de automatul A prin semnalul de ieşire* o.

Teorema II.13.1. *Orice eveniment* $E \in \mathcal{P}^*(I^*)$ *este reprezentabil într-un automat printr-un semnal de ieşire.*

Demonstrație. Fie automatul $A = [I, I^*, \{0,1\}, f, g; e]$ unde $f(p, i) = pi$, iar $g(p, i) = \chi_E(pi)$.

În acest automat evenimentul E este reprezentabil prin semnalul de ieșire 1, deoarece $g_e^{-1}(1) = \{p \mid g(e, p) = 1\} = E$. ■

Observația II.13.2. Teorema II.13.1 își pierde valabilitatea dacă se impune ca automatul A să fie *finit* așa cum rezultă din:

Exemplul II.13.1. Fie $I = \{i\}$ $O = \{0,1\}$ și operatorul φ din exemplul II.10.1 despre care am arătat că are o infinitate de stări. Evenimentul $E = \varphi^{-1}(0) = \{i^m \mid m > 0, \ m \neq k^2\}$ nu este reprezentabil într-un automat finit, deoarece în caz contrar ar exista un automat finit $A = [\{i\}, S, O, f, g; s_0]$ în care E s-ar reprezenta printr-un semnal de ieșire o, adică $E = g_{s_0}^{-1}(o)$. Dar atunci, în automatul finit $A_1 = [\{i\}, S, \{0,1\}, f, g_1]$ cu

$$g_1(s, i) = \begin{cases} 0, \text{ dacă } g(s, i) = o \\ 1, \text{ în caz contrar,} \end{cases}$$

starea s_0 realizează funcția φ de la care am plecat și φ nu era realizabil în nici un automat finit.

Fie acum φ un operator secvențial pe (I, O) cu proprietatea $\varphi(I) = O$ și $o \in O$.

Introducem evenimentul $E_o = \varphi^{-1}(O^* \, o)$.

Observația II.13.3. Evenimentele $\{E_o\}_{o \in O}$ formează o partiție π_φ a evenimentului $I^* \setminus \{e\}$.

Astfel, dacă $o_1 \neq o_2$, $E_{o_1} \cap E_{o_2} = \varnothing$ și

$$\bigcup_{o \in O} E_o = \bigcup_{o \in O} \varphi^{-1}(O^* \, o) = \varphi^{-1}\left(\bigcup_{o \in O} O^* \, o\right) = \varphi^{-1}(O^* \setminus \{e\}) = I^* \setminus \{e\}.$$

Observația II.13.4. Fie $\pi = \{B_o\}_{o \in O}$ o partiție a evenimentului $I^* \setminus \{e\}$. Definim aplicația $\varphi_\pi : I^* \to O^*$ prin:

$$\varphi_\pi(p) = \begin{cases} e, \text{ dacă } p = e \\ o_1 o_2 \ldots o_n, \text{dacă } p = i_1 \ldots i_n, \ n \geqslant 1 \ \ i_1 \ldots i_k \in B_{o_k}, \ k = \overline{1, n}. \end{cases}$$

φ_π este un operator secvențial pe (I, O).

Într-adevăr, $l(\varphi_\pi(p)) = l(p)$ și

$$\varphi_\pi(pq) = o_1 o_2 \ldots o_m o_{m+1} \ldots o_{m+n} \quad \text{cu} \quad i_1 \ldots i_k \in B_{o_k}, \ k = \overline{1, m+n} \quad \text{și} \quad p = i_1 \ldots i_m, \ q = i_{m+1} \ldots i_{m+n}.$$

Atunci

$$\varphi_\pi(pq) = \varphi_\pi(p) \, o_{m+1} \ldots o_{m+n}.$$

Teorema II.13.2. *Avem* $\pi_{\varphi_\pi} = \pi$ *și* $\varphi_{\pi_\varphi} = \varphi$.

Demonstrație. Fie p, $q \in I^*$ și $p \equiv q (\mathrm{mod}\ \pi)$ unde $\pi = \{B_o\}_{o \in O}$.

Atunci cuvintele p și q aparținînd aceluiași bloc B_o, cuvintele $\varphi_\pi(p)$ și $\varphi_\pi(q)$ se termină cu același simbol o, deci cuvintele p și q aparțin aceluiași bloc al partiției π_{φ_π}, adică $p \equiv q \ (\mathrm{mod}\ \pi_{\varphi_\pi})$. Reciproca se arată la fel.

Să arătăm prin inducție după $l(p)$ că:

$$\varphi(p) = \varphi_{\pi_\varphi}(p) \tag{II.13.1}$$

Pentru $l(p) = 0$, $\varphi(e) = \varphi_{\pi_\varphi}(e) = e$.

Presupunem egalitatea (II.13.1) adevărată pentru $l(p) = n$ și fie cuvîntul $q = pi$, $l(q) = n + 1$. Avem $\varphi_{\pi_\varphi}(i_1 \dots i_n) = o_1 \dots o_n$, unde $p = i_1 \dots i_n \in B_{o_n} \in \pi_\varphi$ și $\varphi(i_1 \dots i_k) = o_1 \dots o_k$, $k = \overline{1, n}$. Atunci $\varphi_{\pi_\varphi}(i_1 \dots i_n i) = \varphi_{\pi_\varphi}(i_1 \dots i_n)\, o$ dacă $i_1 \dots i_n i \in B_o$, deci $\varphi(i_1 \dots i_n i) = \dots o$. Cum φ este secvențial $\varphi(i_1 \dots i_n\, i) = \varphi(i_1 \dots i_n)\, o$ și astfel $\varphi_{\pi_\varphi}(pi) = \varphi(pi)$. ■

Consecința II.13.1. Există o corespondență biunivocă între partițiile mulțimii $I^* \setminus \{e\}$ și operatorii secvențiali pe (I, O).

Consecința II.13.2. Fie automatul inițial $A = [I, S, O, f, g; s_0]$ și $\pi = \{g_{s_0}^{-1}(o)\}_{o \in O}$. Atunci $\varphi_\pi = \gamma_{s_0}$.

Demonstrația afirmației de mai sus se face prin inducție.

$\varphi_\pi(e) = \gamma_{s_0}(e) = e$. Apoi, să presupunem $\varphi_\pi(p) = \gamma_{s_0}(p)$. Atunci

$$\varphi_\pi(pi) = \varphi_\pi(p)\, o, pi \in g_{s_0}^{-1}(o);\ \gamma_{s_0}(pi) = \gamma_{s_0}(p)\, \gamma_{f(s_0,p)}(i) = \gamma_{s_0}(p)\, g(f(s_0, p), i) =$$

$$= \gamma_{s_0}(p)\, g(s_0, pi) = \gamma_{s_0}(p)\, o = \varphi_\pi(p)\, o = \varphi_\pi(pi). \blacksquare$$

Definiția II.13.3. *Evenimentul* E este *reprezentat* în automatul $A = [I, S, O, f, g; s_0]$ *prin mulțimea de stări* S_1, dacă $E = f_{s_0}^{-1}(S_1)$. Analog se definește reprezentarea unui eveniment într-un semiautomat inițial printr-o mulțime de stări.

Legătura dintre definițiile II.13.2 și II.13.3 este dată de următoarea teoremă:

Teorema II.13.3. *Fie* $E = g_{s_0}^{-1}(o)$; *atunci pentru mulțimea de stări* $S_1 = f(s_0, E)$ *avem* $E \cup \{e\} = f_{s_0}^{-1}(S_1)$ *sau* $E = f_{s_0}^{-1}(S_1)$ *după cum* s_0 *aparține sau nu lui* S_1.

Demonstrație. Dacă $p \in E$, $f(s_0, p) \in S_1$ și deci $p \in f_{s_0}^{-1}(S_1)$.

Reciproc, fie $p \in f_{s_0}^{-1}(S_1)$. Atunci $f(s_0, p) \in S_1$ și dacă $p \neq e$ urmează că $p \in E$. Dacă $s_0 \in S_1$, atunci $f(s_0, e) \in S_1$, deci în orice caz $p \in E \cup \{e\}$. ■

Observația II.13.5. Teorema precedentă arată că reprezentarea evenimentelor prin mulțimea de stări este mai generală decît reprezentarea lor prin semnale de ieșire, deoarece în el doilea caz este exclus cuvîntul e.

În continuare vom utiliza reprezentarea evenimentelor prin mulțimi de stări și va fi astfel suficient să ne limităm la semiautomate, fără a restrînge generalitatea.

Mulțimea evenimentelor peste alfabete I finite reprezentabile în semiautomate *finite* are importanță deosebită pentru lingvistica matematică și pentru alte aplicații ale teoriei automatelor. De aceea mai departe vom considera cazul $|I| < \infty$ și semiautomate finite.

Definiția II.13.4. Un *eveniment regulat* este un eveniment $E \subseteq I^*$ reprezentabil într-un semiautomat finit.

Vom nota cu $\mathcal{R}(I)$ mulțimea evenimentelor regulate din semigrupul I^*.

Teorema II.13.4. *Fie $E \subseteq I^*$. Atunci următoarele afirmații sînt echivalente.*

1) $E \in \mathcal{R}(I)$,

2) *E este o reuniune de clase de echivalență ale unei congruențe de rang finit asupra lui I^*,*

3) *congruența μ^E este de rang finit, unde:*

$$(p, q) \in \mu^E \leftrightarrow (\forall r_1, r_2 \in I^*, r_1 p r_2 \in E \leftrightarrow r_1 q r_2 \in E).$$

Demonstrație. Vom arăta că 1) $\rightarrow$ 2), 2) $\rightarrow$ 3) și 3) $\rightarrow$ 1). a) 1) $\rightarrow$ 2). Fie $E \in \mathcal{R}(I)$ și fie $A = [I, S, f; s_0]$ un semiautomat inițial finit în care E este reprezentabil prin mulțimea de stări S_1, adică $p \in E$ dacă și numai dacă $f(s_0, p) \in S_1$.

Definim relația $\xi = \bigcap_{s \in S} \ker f_s$. ξ este o congruență.

Se constată imediat că ξ este o relație de echivalență. Fie acum $(p, q) \in \xi$. Să verificăm că $(pr, qr) \in \xi$, $(rp, rq) \in \xi$, $\forall\, r \in I^*$. Astfel $\forall s \in S, f(s, pr) = f(f(s, p), r) = f(f(s, q), r) = f(s, qr)$. Apoi $\forall\, s \in S, f(s, rp) = f(f(s, r), p) = f(f(s, r), q) = f(s, rq)$. Relația ξ este de rang finit.

Fie $S = \{s_1, \ldots, s_k\}$ și aplicația $\tau\colon S \to S$. Notăm cu $I^*(\tau) = \{p \mid p \in I^*, f(s_h, p) = \tau(s_h), h = \overline{1, k}\}$. Să arătăm că $(p, q) \in \xi$ dacă și numai dacă există o aplicație τ astfel ca $\{p, q\} \subseteq I^*(\tau)$.

Fie $(p, q) \in \xi$. Definind aplicația τ prin $\tau(s_h) = f(s_h, p) = f(s_h, q)$ avem $p \in I^*(\tau)$ și $q \in I^*(\tau)$.

Invers, dacă $\{p, q\} \subseteq I^*(\tau)$ atunci $f(s_h, p) = \tau(s_h) = f(s_h, q)$ deci $(p, q) \in \xi$. Astfel fiecărei clase din mulțimea I^*/ξ i se atașează în mod biunivoc o aplicație $\tau\colon S \to S$. Deoarece numărul acestor aplicații nu poate depăși k^k urmează $|I^*/\xi| \leqslant k^k$, deci ξ este o congruență de rang finit.

Fie acum $p \in E$ și $(p, q) \in \xi$. Atunci $f(s_0, q) = f(s_0, p) \in S_1$ și deci $q \in E$. Astfel E este reuniunea unor clase de echivalență ale lui ξ.

b) 2) $\rightarrow$ 3). Fie ξ o congruență de rang finit pe I^* și E o reuniune de clase de echivalență după relația ξ. Fie $(p, q) \in \xi$. Dacă $r_1 p r_2 \in E$, deoarece $(r_1 p r_2, r q r_2) \in \xi$ (ξ fiind o congruență) obținem $r_1 q r_2 \in E$, deci $(p, q) \in \mu^E$ și astfel $\xi \leqslant \mu^E$ de unde $|I^*/\mu^E| \leqslant |I^*/\xi|$.

c) 3) $\rightarrow$ 1). Fie $E \subseteq I^*$ și să presupunem că $|I^*/\mu^E| < +\infty$. Evenimentul E este reprezentabil în semiautomatul $A = [I, I^*/\mu^E, f; [e]]$, unde $f([p], i) = [pi]$, prin mulțimea de stări $S_1 = \{[p] \mid p \in E\}$. Se observă că $f([p], q) = [pq]$.

Avem $p \in E$ dacă și numai dacă $[p] \in S_1$ ceea ce are loc dacă și numai dacă $f([e], p) \in S_1$. ■

Observația II.13.6. Fie $E \subseteq I^*$ și aplicația caracteristică a lui E, $\chi_E: I^* \rightarrow \{0, 1\}$. Avem $\mu^E = \mu^{\chi_E}$

Fie $(p,q) \in \mu^E$. Atunci $\chi_E(r_1 p r_2) = \chi_E(r_1 q r_2)$, $\forall r_1, r_2 \in I^*$ ceea ce revine la $\chi_E(L_{r_1}(L_p(r_2))) = \chi_E(L_{r_1}(L_q(r_2)))$, de unde

$$\chi_E L_{r_1} L_p = \chi_E L_{r_1} L_q,$$

adică $(p,q) \in \mu^{\chi_E}$ (vezi definiția II.9.1).

Analog, din $(p, q) \in \mu^{\chi_E}$ rezultă $(p, q) \in \mu^E$ și astfel $\mu^E = \mu^{\chi_E}$. ■

Teorema II.13.5. *Fie $E \subseteq I^*$. Următoarele afirmații sînt echivalente:*

1) $E \in \mathcal{R}(I)$,

2) *E este o reuniune de clase după o congruență la dreapta pe I^*, de rang finit*

3) *Congruența la dreapta ν^E este de rang finit, unde*

$$(p, q) \in \nu^E \leftrightarrow (\forall r \in I^*, pr \in E \leftrightarrow qr \in E).$$

Demonstrația este similară cu cea a teoremei II.13.3 definind însă pe $\xi = \ker f_{s_0}$; se constată imediat că ξ este o congruență la dreapta. ■

Observația II.13.7. Avem $\nu^E = \nu^{\chi_E}$. Într-adevăr, fie $(p, q) \in \nu^E$. Atunci $\chi_E(pr) = \chi_E(qr)$, $\forall r \in I$ sau $\chi_E L_p = \chi_E L_q$, adică $(p, q) \in \nu^{\chi_E}$. La fel, dacă $(p, q) \in \nu^{\chi_E}$ atunci $(p,q) \in \nu^E$. ■

Teorema II.13.6. *Dacă $E \in \mathcal{R}(I)$, atunci numărul minim de stări ale unui semiautomat în care E este reprezentabil este egal cu $|I^*/\nu^E|$.*

Demonstrația se face prin reducere la absurd. Să presupunem că evenimentul E poate fi reprezentat în semiautomatul $A' = [I, S', f'; s_0']$, $|S'| < |I^*/\nu^E|$. Atunci fie relația $\xi' = \ker f'_{s_0}$. Ca și în demonstrarea punctului b) din teorema II.13.4 se arată că $|I^*/\nu^E| \leqslant |I^*/\xi'|$.

Aplicația $\tau: I^*/\xi' \rightarrow S'$ definită prin $\tau([p]) = f'(s_0', p)$ este injectivă, deci $|I^*/\xi'| \leqslant |S'|$, ceea ce contrazice presupunerea inițială. ■

Vom studia în continuare proprietățile de închidere ale mulțimii $\mathcal{R}(I)$.

Fie $p \in I^*$, $p = i_1 i_2 \ldots i_n$. Asociem lui p „imaginea sa în oglindă" adică cuvîntul $\widetilde{p} = i_n i_{n-1} \ldots i_1$. Fie $\widetilde{E} = \{\widetilde{p} \mid p \in E\}$ se constată imediat că $\widetilde{(pq)} = \widetilde{q}\widetilde{p}$ și $\widetilde{\widetilde{E}} = E$.

Teorema II.13.7. *$E\in\mathcal{R}(I)$ dacă și numai dacă $\widetilde{E}\in\mathcal{R}(I)$*

Demonstrație. Este suficient să arătăm, conform teoremei II.13.4 că $|I^*/\mu^E| < \infty$ dacă și numai dacă $|I^*/\mu^{\widetilde{E}}| < \infty$.

Fie $(p, q)\in\mu^E$. Atunci $\forall r_1, r_2\in I^*$, $\chi_E(r_1pr_2) = \chi_E(r_1qr_2)$ sau $\chi_{\widetilde{E}}(r_3\widetilde{p}r_4) = \chi_{\widetilde{E}}(r_3\widetilde{q}r_4)$, $\forall r_3, r_4\in I^*$, deci $(p, q)\in\mu^{\widetilde{E}}$ și reciproc. ■

Teorema II.13.8. *$E\in\mathcal{R}(I)$ dacă și numai dacă $\overline{E}\in\mathcal{R}(I)$, unde $\overline{E} = I^*\setminus E$.*

Demonstrație. Dacă $E = f_{s_0}^{-1}(S_1)$ atunci $\overline{E} = f_{s_0}^{-1}(S\setminus S_1)$. ■

Teorema II.13.9. *Dacă $E_1, E_2\in\mathcal{R}(I)$ atunci $E_1\cap E_2\in\mathcal{R}(I)$.*

Demonstrație. Fie semiautomatele $A_j = [I, S^j, f^j; s_0^j]$, $j = 1, 2$, în care evenimentele E_1 și E_2 sînt reprezentate respectiv prin mulțimile de stări $S_1\subseteq S^1$, $S_2\subseteq S^2$.

Să considerăm semiautomatul $A = [I, S^1\times S^2, f; (s_0^1, s_0^2)]$, unde f: $S^1\times S^2\times I\to S^1\times S^2$ astfel ca $\mathrm{pr}_j f = f^j$, $j = 1, 2$ (vezi definiția II.8.3).

Evenimentul $E_1\cap E_2$ este reprezentat în automatul A prin mulțimea de stări $S_1\times S_2\subseteq S^1\times S^2$.

Într-adevăr, dacă $p\in E_1\cap E_2$, $f_{s_0}^1(p)\in S_1$, $f_{s_0}^2(p)\in S_2$ și astfel $(s_0', s_0')(p)\in\in S_1\times S_2$ și reciproc. ■

Teorema II.13.10. *Mulțimea $\{\mathcal{R}(I), \cup, \cap, -\}$ este o algebră Boole.*

Demonstrație. Afirmația se justifică prin teoremele II.13.8 și II.13.9 și ținînd seama de faptul că:

$$E_1\cup E_2 = \overline{\overline{E}_1\cap\overline{E}_2}.$$ ■

Consecința II.13.3. Dacă $|E| < \infty$ atunci $E\in\mathcal{R}(I)$.

Este suficient să arătăm că dacă $|E| = 1$, adică $E = \{p\}$, atunci $E\in\mathcal{R}(I)$ și să ținem seama de teorema precedentă.

Dacă $p = e$ atunci $\{p\}$ este reprezentat într-un semiautomat inițial oarecare $A = [I, S, f; s_0]$ prin starea s_0, f fiind astfel ales încît $f(s, i)\neq s_0$, $\forall i\in I$, $\forall s\in S$.

Fie $p = i_1i_2\ldots i_n$. Atunci evenimentul $\{p\}$ va fi reprezentat în semiautomatul $A = [I, S, f; e]$, unde $S = \{e, i_1, i_1i_2, \ldots, i_1i_2\ldots i_n, s\}$,

$$f(i_1\ldots i_j, i) = \begin{cases} i_1\ldots i_ji_{j+1}, & \text{dacă } i = i_{j+1} \\ s, & \text{în caz contrar,}\end{cases}$$

$$f(e, i) = \begin{cases} i_1, & \text{dacă } i = i_1 \\ s, & \text{dacă } i\neq i_1,\end{cases}$$

și $f(s, i) = f(i_1\ldots i_n, i) = s$, prin starea $i_1i_2\ldots i_n$. ■

Pentru automatele nedeterministe definiția II.13.3 se extinde în mod natural.

Definiția II.13.5. Un *eveniment* E este *reprezentat* în *semiautomatul nedeterminist*, slab inițial $A = [I, S, f; S_0]$ prin mulțimea de stări S_1 dacă $E = \{p \mid f(S_0, p) \cap S_1 \neq \emptyset\}$, adică orice cuvînt din E induce o evoluție admisibilă care se termină într-o stare din S_1.

Observația II.13.8. Un eveniment reprezentabil în semiautomate deterministe este reprezentabil și în automate nedeterministe slab inițiale deoarece orice semiautomat determinist inițial poate fi interpretat ca semiautomat nedeterminist slab inițial.

Un interes deosebit îl prezintă afirmația reciprocă.

Teorema II.13.11. *Un eveniment reprezentabil în semiautomate nedeterministe este reprezentabil în semiautomate deterministe.*

Demonstrație. Fie $E \subseteq I^*$ evenimentul reprezentat în semiautomatul nedeterminist $A = [I, S, f; S_0]$ prin mulțimea de stări S_1. Considerăm macrosemiautomatul inițial $M(A) = [I, \mathcal{P}^*(S), F; S_0]$, care este un semiautomat determinist.

Fie E' evenimentul reprezentat în macrosemiautomatul $M(A)$ prin mulțimea de stări $S_M = \{S' \mid S' \cap S_1 \neq \emptyset\}$.

Fie $p \in E$. Atunci $f(S_0, p) \cap S_1 \neq \emptyset$ și astfel $f(S_0, p) = F(S_0, p) \in S_M$; obținem $p \in E'$, adică $E \subseteq E'$.

Invers, dacă $p \in E'$, $F(S_0, p) \in S_M$, adică $f(S_0, p) \cap S_1 \neq \emptyset$. Cum însă $f(S_0, p) = F(S_0, p)$ urmează $p \in E$ sau $E' \subseteq E$. ∎

Utilizînd această teoremă vom pune în evidență și alte proprietăți de închidere ale mulțimii $\mathcal{R}(I)$, a căror demonstrare directă este dificilă.

Definiția II.13.6. *Produsul* E_1E_2 al *evenimentelor* E_1 și E_2 este evenimentul

$$E_1E_2 = \{pq \mid p \in E_1, q \in E_2\}.$$

Vom nota $EE = E^2$ și $EE^n = E^{n+1}$; $E^0 = \{e\}$, $\forall E$.

Definiția II.13.7. *Operatorul de închidere complexă* este aplicația $\mathbf{C}: \mathcal{P}(I^*) \to \mathcal{P}(I^*)$ dată de:

$$\mathbf{C}(E) = E^0 \cup E \cup \ldots \cup E^n \cup \ldots = \bigcup_{n=0}^{\infty} E^n.$$

Definiția II.13.8. *Operatorul de închidere prin prefixe* este aplicația $\mathbf{P}: \mathcal{P}(I^*) \to \mathcal{P}(I^*)$ dată de

$$\mathbf{P}(E) = \{q \mid \exists r \in I^*, qr \in E\} \cup \{e\}.$$

Lăsăm în seama cititorului verificarea proprietăților de operator de închidere (vezi definiția I.5.2.) pentru aplicațiile $\mathbf{C}$ și $\mathbf{P}$.

Teorema II.13.12. *Dacă* $E_1, E_2 \in \mathcal{R}(I)$ *atunci* $E_1E_2 \in \mathcal{R}(I)$.

Demonstrație. Dacă $E_1, E_2 \in \mathcal{R}(I)$ există semiautomatele finite, deterministe, inițiale $A_j = [I, S^j, f^j, s_0^j]$, $j = 1, 2$ în care evenimentele E_1 și E_2 sînt reprezentate respectiv prin mulțimile de stări $S_1 \subseteq S^1$, $S_2 \subseteq S^2$.

Vom arăta că evenimentul E_1E_2 este reprezentabil în semiautomatul nedeterminist $A = [I, S^1 \cup' S^2, f; s^0]$ prin mulțimea de stări S_2. Aici:

$$f(s, i) = \begin{cases} \{f^1(s,i)\}, \text{ dacă } s \in S^1 \setminus S_1 \\ \{f^1(s, i), f^2(s_0^2, i)\}, \text{ dacă } s \in S_1 \\ \{f^2(s, i)\} \text{ dacă } s \in S_2. \end{cases}$$

Fie E evenimentul reprezentabil în semiautomatul nedeterminist A prin mulțimea de stări S_2 și $p_1 \in E_1$, $p_2 \in E_2$.

Avem $f^1(s_0^1, p_1) \in S_1$ și, dacă $p_2 = i_1 \dots i_m$ obținem $f^2(s_0^2, i_1) \in f(f^1(s^1, p_1), i_1)$. De aici rezultă imediat că $f(s_0^1, p_1p_2) \cap S_2 \neq \emptyset$ și deci $p_1p_2 \in E$, adică $E_1E_2 \subseteq E$.

Invers, fie $p = i_1 \dots i_n \in E$. Atunci $f(s_0', p) \cap S_2 \neq \emptyset$ și fie $k = \min \{j \mid f(s_0^1, i_1 \dots i_{j+1}) \neq f^1(s_0^1, i_1 \dots i_j)\}$. Din modul de definire al semiautomatului A, cuvîntul $p_1 = i_1 \dots i_k$ aparține evenimentului E_1, iar cuvîntul $p_2 = i_{k+1} \dots i_n$ aparține evenimentului E_2, adică $E \subseteq E_1E_2$.

Prin urmare $E = E_1E_2$ și, în virtutea teoremei II.13.11 evenimentul E_1E_2 este reprezentabil în automate deterministe. ■

Teorema II.13.13. *Dacă* $E \in \mathcal{R}(I)$ *atunci* $\mathbf{C}(E) \in \mathcal{R}(I)$.

Demonstrație. Să presupunem evenimentul E reprezentabil în semiautomatul determinist $A = [I, S, f; s_0]$ prin mulțimea de stări S_1 și fie semiautomatul nedeterminist $A_C = [I, S, F; s_0]$ în care

$$F(s, i) = \begin{cases} \{f(s, i)\}, \text{ dacă } s \in S \setminus S_1 \\ \{f(s, i), f(s_0, i)\}, \text{ dacă } s \in S_1. \end{cases}$$

Fie E' evenimentul reprezentabil în A_C prin mulțimea de stări S_1.

Să arătăm că $\mathbf{C}(E) = E'$.

Fie $p \in \mathbf{C}(E)$. Atunci există $k \in N$, $\{q_1, q_2, \dots, q_k\} \subseteq E$ și $p = q_1q_2 \dots q_k$. Dar, $f(s_0, q_1) \in S_1$ și ca atare, dacă $q_2 = i_1 \dots i_m$, $F(s_0, q_1i_1) = \{f(s_0, q_1i_1), f(s_0, i_1)\}$. Se vede imediat că $F(s_0, q_1q_2) \cap S_1 \neq \emptyset$ și mai general $F(s_0, q_1q_2 \dots q_n) \cap S_1 \neq \emptyset$ pentru $h = \overline{1, k}$. În particular, pentru $h = k$ obținem: $F(s_0, p) \cap S_1 \neq \emptyset$ și deci $\mathbf{C}(E) \subseteq E'$.

Fie $p = i_1 \dots i_n \in E'$. Avem $F(s_0, p) \cap S_1 \neq \emptyset$. Se vede ușor că p se poate scrie $p = q_1q_2 \dots q_k$, $k \geqslant 1$, unde $f(s_0, q_h) \in S_1$, $\forall h = \overline{1, k}$ și de aici urmează $p \in E^k$, adică $E' \subseteq \mathbf{C}(E)$, deci $E' = \mathbf{C}(E)$.

Teorema II.13.14. *Dacă* $E \in \mathcal{R}(I)$, *atunci* $\mathbf{P}(E) \in \mathcal{R}(I)$.

Demonstrație. Fie $A = [I, S, f; s_0]$ semiautomatul în care evenimentul E este reprezentabil prin mulțimea de stări S_1.

Se constată imediat că evenimentul $\mathbf{P}(E)$ este reprezentabil prin mulțimea $S' = \{s \mid \exists\, p \in E,\ p = qr,\ f(s_0, q) = s\} \subseteq S$. ■

Teorema II.13.15. *Fie $E \in \mathcal{R}(I)$, reprezentat în semiautomatul finit $A = [I, S, f; s_0]$ prin mulțimea de stări S_1. Evenimentul $E \neq \emptyset$ dacă și numai dacă există un cuvînt $p \in I^*$ cu $l(p) < |S|$ și $f(s_0, p) \in S_1$.*

Demonstrație. Dacă există un cuvînt p cu proprietatea indicată atunci $E \neq \emptyset$. Reciproc, să presupunem că $E \neq \emptyset$ și fie $p \in E$ cu $l(p) = \min\limits_{q \in E} \{l(q)\}$. Dacă $l(p) \geqslant |S|$ atunci fie $s_{k+1} = f(s_k, i_k)$, $k = \overline{0, l(p)}$, unde $p = i_1 i_2 \ldots i_n$.

Mulțimea $\{s_{k+1}\}_{k=\overline{0, l(p)}}$ avînd cel puțin $|S| + 1$ stări, nu poate avea toate elementele distincte, există deci două numere j_1 și j_2 astfel ca $s_{j_1+1} = s_{j_2+1}$, $0 \leqslant j_1 < j_2 \leqslant l(p)$.

Atunci cuvîntul $q = i_1 \ldots i_{j_1} i_{j_2} \ldots i_{l(p)} \in E$ și $l(p) < l(p)$ ceea ce contrazice presupunerea făcută.

Observația II.13.9. Deoarece numărul cuvintelor de lungime cel mult n este finit problema existenței unui eveniment regulat nevid reprezentabil într-un semiautomat este decidabilă.

§ II.14. SISTEME TRANZIȚIONALE ȘI EXPRESII REGULATE

În acest paragraf vom prezenta o construcție axiomatică a mulțimii $\mathcal{R}(I)$ și vom da teoremele de analiză și sinteză ale automatelor servindu-ne de o generalizare a noțiunii de semiautomat nedeterminist și anume de noțiunea de sistem tranzițional.

Definiția II.14.1. Un *sistem tranzițional* este un 5-uplu $T = [I, S, f, \varepsilon; S_0]$ unde I este alfabetul de intrare, S este mulțimea de stări, $f: S \times I \to \mathcal{P}(S)$ este funcția de trecere, $\varepsilon \subseteq S \times S$ este *relația de tranziție spontană*, iar $S_0 \subseteq S$ este mulțimea stărilor inițiale.

Sistemul tranzițional este o generalizare a noțiunii de semiautomat nedeterminist în sensul că la introducerea unui simbol el acționează ca un semiautomat nedeterminist, dar are în plus libertatea de a efectua tranziții spontane (fără introducerea unui simbol de intrare) între perechi de stări aflate în relația ε și poate reflecta interdicția de a aplica anumite intrări cînd sistemul se află în anumite stări prin existența unor perechi (s, i) pentru care $f(s, i) = \emptyset$.

Observația II.14.1. Dacă $(s', s'') \in \varepsilon$, vom nota acest lucru și sub forma $s'' \in f(s', e)$. Există simboli de intrare i și stări s astfel că $f(s, i) = \emptyset$, fapt

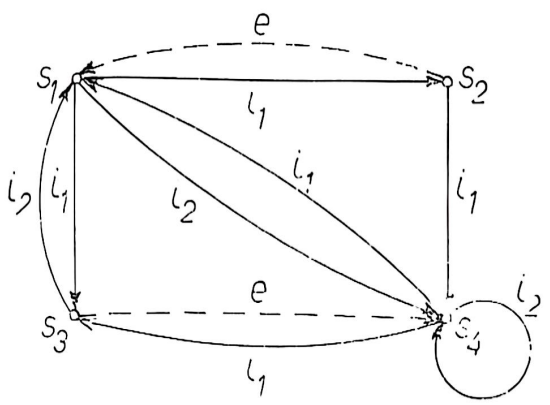


Fig. II.14.1

care poate fi interpretat ca interdicţia de a aplica simbolul i sistemului tranziţional, cînd acesta se află în starea s.

Exemplul II.14.1. Fie $T=[\{i_1, i_2\}, \{s_1, s_2, s_3, s_4\}, f, \varepsilon; \{s_1, s_2\}]$ unde f este dat de tabelul:

f	s_1	s_2	s_3	s_4
i_1	$\{s_2, s_3\}$	$\{s_4\}$	$\varnothing$	$\{s_1, s_3\}$
i_2	$\{s_4\}$	$\varnothing$	$\{s_1\}$	$\{s_4\}$

iar $\varepsilon = \{(s_2, s_1), (s_2, s_4)\}$.

Sistemul tranziţional T este reprezentat în fig.II.14.1.

Observaţia II.14.2. Orice semiautomat poate fi interpretat ca un sistem tranziţional luînd $\varepsilon = \iota_S$ şi ţinînd seama de formula (II.2.1).

Definiţia II.14.2. *Relaţia de trecere* a unui sistem tranziţional $T = [I, S, f, \varepsilon; S_0]$ este relaţia ternară $\theta \subseteq S \times I^* \times S$ definită inductiv prin

$$(s', e, s'') \in \theta \leftrightarrow (s', s'') \in \hat{\varepsilon} \text{ *)},$$

(II.14.1)

$$(s', pi, s'') \in \theta \leftrightarrow \exists\, s_1, s_2 \in S, (s', p, s_1) \in \theta \wedge s_2 \in f(s_1, i) \wedge (s_2, e, s'') \in \theta.$$

Observaţia II.14.3. Făcînd $p = e$ în formula (II.14.1) obţinem $(s', i, s'') \in \theta$ dacă şi numai dacă există $s_1, s_2 \in S$ astfel ca $(s', s_1) \in \hat{\varepsilon}$, $s_2 \in f(s_1, i)$, $(s_2, s'') \in \hat{\varepsilon}$ (vezi figura II.14.2. a)

Semnificaţia faptului că $(s', pi, s'') \in \theta$ este vizibilă în figura (II.14.2 b).

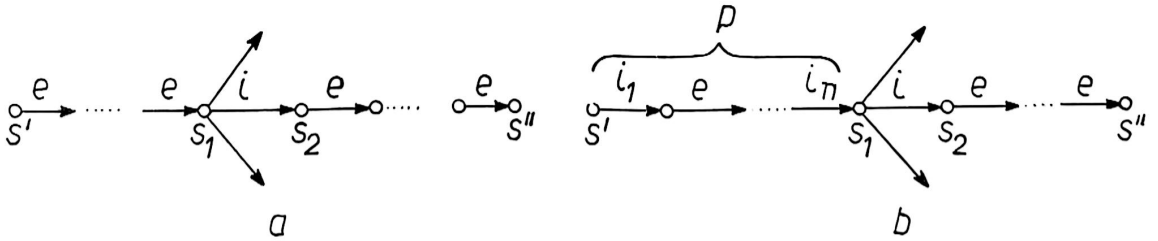


Fig. II.14.2

Definiţia II.14.3. *Evenimentul* $E \subseteq I^*$ este *reprezentat în sistemul tranziţional* $T = [I, S, f, \varepsilon; S_0]$ prin mulţimea de stări $S_1 \subseteq S$ dacă:

$$E = \{p \mid \exists\, s_0 \in S_0, s_1 \in S_1, (s_0, p, s_1) \in \theta\}.$$

---

* $\hat{\varepsilon}$ este închiderea reflexivă şi tranzitivă a relaţiei ε.

Unui sistem tranziţional i se poate ataşa un semiautomat determinist.

Definiţia II.14.4. *Semiautomatul determinist ataşat sistemului tranziţional* $T = [I, S, f, \varepsilon; S_0]$ este semiautomatul $S(T) = [I, \mathcal{P}(S), F; Z]$, unde

$$F(S', i) = \{s \mid \exists\, s' \in S',\ \exists\, s_1 \in S,\ s_1 \in f(si) \wedge (s_1, s) \in \hat{\varepsilon}\},$$

$$Z = \{s \mid \exists\, s_0 \in S_0,\ (s_0, s) \in \hat{\varepsilon}\}.$$

Exemplul II.14.2. În figura II.14.3 este reprezentat un sistem tranziţional (II.14.3. a) şi semiautomatul ataşat (II.14.3 b).

Teorema II.14.1. *Fie sistemul tranziţional* $T = [I, S, f, \varepsilon; S_0]$ *şi* $S(T) = [I, \mathcal{P}(S), F; Z]$ *semiautomatul ataşat. Atunci*

$$F_z(p) = \{s \mid \exists s_0 \in S_0,\ (s_0, p, s) \in \theta\}. \tag{II.14.2}$$

Demonstraţie. Vom proceda prin inducţie după $l(p)$. Pentru $l(p) = 0$, $p = e$ avem

$$Z = F_z(e) = \{s \mid \exists\, s_0 \in S_0,\ (s_0, s) \in \hat{\varepsilon}\} = \{s \mid \exists\, s_0 \in S_0,\ (s_0, e, s) \in \theta\}.$$

Presupunînd acum egalitatea (II.14.2) adevărată pentru p să arătăm că ea are loc pentru pi, $\forall i \in I$. Deci trebuie să arătăm că:

$$F_z(pi) = F(Z, pi) = F(F(Z, p), i) = F(\{s \mid \exists\, s_0 \in S_0,\ (s_0, p, s) \in \theta\}, i) =$$

$$= \{s \mid \exists\, s_0 \in S_0,\ (s_0, pi, s) \in \theta\}.$$

Să notăm $S' = \{s \mid \exists\, s_0 \in S_0,\ (s_0, p, s) \in \theta\}$.

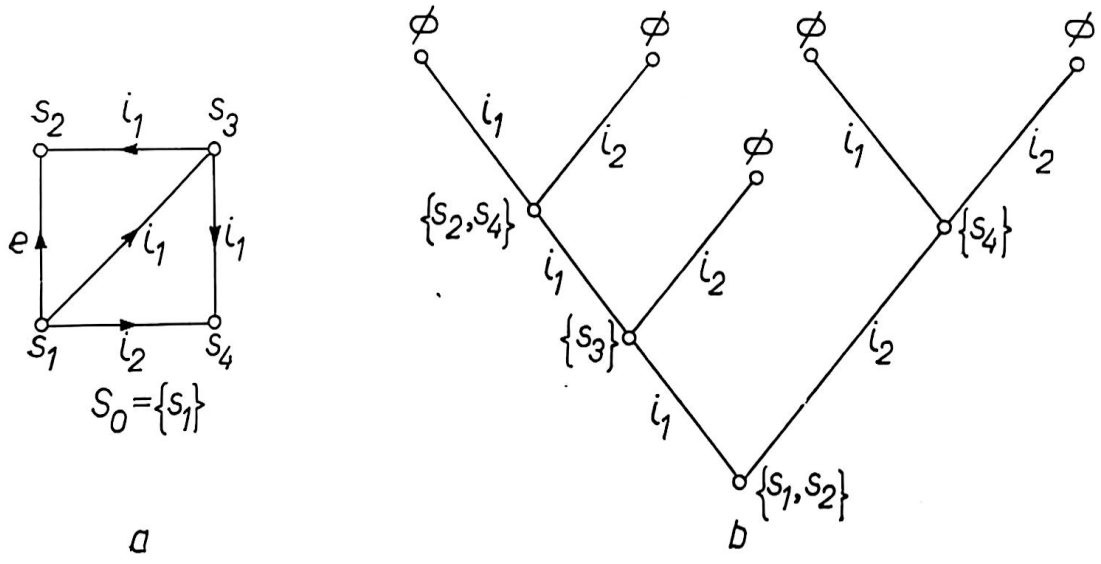


Fig. II.14.3

Atunci conform definiției II.14.4

$$F(S', i) = \{s \mid \exists\, s' \in S',\ \exists\, s_1 \in S,\ s_1 \in f(s', i) \wedge (s_1, s) \in \hat{e}\} =$$

$$= \{s \mid \exists\, s' \in S',\ \exists\, s_1 \in S,\ s_1 \in f(s', i) \wedge (s_1, e, s) \in \theta\} =$$

$$= \{s \mid \exists\, s_0 \in S_0,\ (s_0, p, s') \in \theta \wedge \exists\, s_1 \in S,\ s_1 \in f(s', i),\ (s_1, e, s) \in \theta\} =$$

$$= s\{\exists\, s_0 \in S_0,\ (s_0, p, s) \in \theta\}.$$

Am ținut seama și de definiția II.14.2. ■

Teorema II.14.2. *Fie sistemul tranzițional* $T = [I, S, f, e; S_0]$. $S(T) = [I, \mathcal{P}(S), F; Z]$ *semiautomatul atașat și* $S_1 \subseteq S$. *Atunci evenimentul reprezentat în sistemul tranzițional* T *prin mulțimea de stări* S *coincide cu evenimentul reprezentat în semiautomatul* $S(T)$ *prin mulțimea de stări* Z_1, *unde* $Z_1 = \{S' \mid S' \subseteq S \wedge S' \cap S_1 \neq \emptyset\}$

Demonstrație. Să notăm cu $E_1 \subseteq I^*$ evenimentul reprezentant în sistemul tranzițional T prin mulțimea de stări S_1 și cu $E_2 \subseteq I^*$ evenimentul reprezentat în $S(T)$ prin mulțimea de stări Z_1.

Să arătăm că $E_2 \subseteq E_1$. Fie $p \in E_2$. Atunci $F_x(p) = S' \in Z_1$, de unde urmează existența unei stări $s \in S' \cap S_1$. Ținînd seama de teorema precedentă, $(s_0, p, s) \in \theta$ și cum $s \in S_1$ avem $p \in E_1$.

Să arătăm că $E_1 \subseteq E_2$. Fie acum $p \in E_1$. Atunci $\exists\, s_0 \in S_0$, $s_1 \in S_1$ astfel ca $(s_0, p, s_1) \in \theta$. Fie mulțimea $S' = \{s \mid \exists\, s_0 \in S_0, (s_0, p, s) \in \theta\}$. $S' \neq \emptyset$, deoarece $s_1 \in S'$, deci $S' \cap S_1 \neq \emptyset$. Prin urmare $S' \in Z_1$ și astfel $p \in E_2$. ■

Consecința II.14.1. Evenimentele reprezentabile în sisteme tranzitionale finite sînt evenimente regulate, deoarece dacă $|S| < \infty$, $|\mathcal{P}(S)| = 2^{|S|} < \infty$.

Afirmația de mai sus constituie o extindere a teoremei II.13.11.

Vom da acum construcția sistemului formalizat al expresiilor regulate. În acest scop vom folosi următoarea *listă inițială de simboluri*: $\{\emptyset, e, i_1, i_2, \ldots, i_n, \vee, \cdot, (,), C\}$ și următoarele *formule atomice* [I. Vaisman [1]]: $\alpha \vee \beta$, $\alpha \cdot \beta$, $C(\alpha)$, în care α și β aparțin mulțimii primilor $n + 2$ simboli din lista de mai sus.

Fie γ și δ două formule corect construite. Formulele $\gamma \vee \delta$, $\gamma \cdot \delta$, $C(\gamma)$ sînt prin definiție formule corect construite. Aceasta este așa zisa *regulă de deducție a sistemului*.

Toate formulele corect construite, printre care figurează și $\emptyset, e, i_1, \ldots, i_n$ vor fi numite în continuare *expresii regulate* și vor alcătui *limbajul expresiilor regulate* notat cu $\mathcal{L}$.

Vom ataşa unei expresii regulate un eveniment dintr-un alfabet convenabil ales utilizînd în acest scop:

Definiţia II.14.5. *Aplicaţia de valuare* $|\cdot|: \mathcal{L} \to \mathcal{P}(I^*)$ este dată prin:

1. $|\mathbf{0}| = \emptyset$,
2. $|\mathbf{e}| = e$,
3. $|\mathbf{i}_j| = \{i_j\}, j = \overline{1, n}$,
4. $|\alpha \vee \beta| = |\alpha| \cup |\beta|$,
5. $|\alpha \cdot \beta| = |\alpha| \, |\beta|$,
6. $|\mathbf{C}(\alpha)| = \{e\} \cup |\alpha| \cup |\alpha|^2 \cup \ldots$

Observaţia II.14.4. Avem:

$$|\mathbf{C}(\mathbf{i}_1 \vee \mathbf{i}_2 \vee \ldots \vee \mathbf{i}_N)| = \{i_1, i_2, \ldots, i_N\}^*,$$

$$|\mathbf{C}(\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2)| = \{p \mid p \in \{i_1, i_2\}^*, p = i_1 i_2 i_1 i_2 \ldots i_2\} \cup \{e\},$$

a căror demonstrare o lăsăm pe seama cititorului.

Definiţia II.14.6. Două *expresii regulate* α, β sînt *echivalente*, $\alpha = \beta$ dacă şi numai dacă

$$|\alpha| = |\beta|.$$

Teorema II.14.3. *Limbajul $\mathcal{L}$ este o semilatice cu prim element $\emptyset$ faţă de operaţia „$\vee$". Faţă de operaţia „$\cdot$" $\mathcal{L}$ este un semigrup avînd elementul unitate* **e**. *Operaţia „$\cdot$" este distributivă bilateral faţă de operaţia „$\vee$", iar primul element al semilaticei $(\mathcal{L}, \vee)$ este un zero pentru semigrupul $(\mathcal{L}, \cdot)$.*

Demonstraţie. Afirmaţiile din teoremă revin la demonstrarea următoarelor egalităţi:

$$\alpha \vee \beta = \beta \vee \alpha, \qquad \alpha \cdot (\beta \vee \gamma) = \alpha \cdot \beta \vee \alpha \cdot \gamma,$$

$$\alpha \vee \alpha = \alpha, \qquad (\beta \vee \gamma) \cdot \alpha = \beta \cdot \alpha \vee \gamma \cdot \alpha,$$

$$\alpha \vee (\beta \vee \gamma) = (\alpha \vee \beta) \vee \gamma, \qquad \alpha \cdot \emptyset = \emptyset \cdot \alpha = \emptyset,$$

$$\alpha \vee \emptyset = \alpha,$$

$$\alpha \cdot (\beta \cdot \gamma) = (\alpha \cdot \beta) \cdot \gamma,$$

$$\mathbf{e} \cdot \alpha = \alpha \cdot \mathbf{e} = \alpha,$$

care revin în baza definiţiei II.14.6, la demonstrarea egalităţilor corespunzătoare pentru evenimente (v.def. II.14.5).

Teorema II.14.4. *Operația unară* $\mathbf{C}$ *pe* $\mathcal{L}$ *are următoarele proprietăți:*

$$\mathbf{C}(\alpha \vee \beta) = \mathbf{C}(\mathbf{C}(\alpha) \cdot \mathbf{C}(\beta)) = \mathbf{C}(\mathbf{C}(\alpha) \vee \mathbf{C}(\beta)),$$

$$\mathbf{C}(\alpha) = (e \cup \alpha)^{m-1}\ \mathbf{C}(\alpha^m), \forall m \in N^*,$$

$$\mathbf{C}(e) = \mathbf{C}(\varnothing) = e.$$

Demonstrație. Fie $|\alpha| = E_1$ și $|\beta| = E_2$
Avem

$$|\mathbf{C}(\alpha \vee \beta)| = \{e\} \cup |\alpha \vee \beta| \cup |\alpha \vee \beta|^2 \cup \ldots = \{e\} \cup E_1 \cup E_2 \cup (E_1 \cup E_2)^2 \cup \ldots =$$
$$= \{e\} \cup E_1 \cup E_2 \cup E_1^2 \cup E_1E_2 \cup E_2E_1 \cup E_2^2 \cup \ldots$$

Pe de altă parte

$$|\mathbf{C}(\mathbf{C}(\alpha) \cdot \mathbf{C}(\beta))| = \{e\} \cup |\mathbf{C}(\alpha) \cdot \mathbf{C}(\beta)| \cup |\mathbf{C}(\alpha) \cdot \mathbf{C}(\beta)|^2 \cup \ldots =$$
$$= \{e\} \cup |\mathbf{C}(\alpha)||\mathbf{C}(\beta)| \cup |\mathbf{C}(\alpha)||\mathbf{C}(\beta)||\mathbf{C}(\alpha)||\mathbf{C}(\beta)| \cup \ldots =$$
$$= \{e\} \cup \{\{e\} \cup E_1 \cup E_1^2 \cup \ldots\}\{\{e\} \cup E_2 \cup E_2^2 \cup \ldots\} \cup \ldots =$$
$$= \{e\} \cup E_1 \cup E_2 \cup E_1E_2 \cup \ldots,$$

deci

$$\mathbf{C}(\alpha \vee \beta) = \mathbf{C}(\mathbf{C}(\alpha).\ \mathbf{C}(\beta)).$$

Celelalte egalități se demonstrează la fel. ■

Observația II.14.5. Dacă $\alpha \cdot \beta = \beta \cdot \alpha$ atunci

$$\mathbf{C}(\alpha \vee \beta) = \mathbf{C}(\alpha).\ \mathbf{C}(\beta),$$

și

$$\mathbf{C}(\mathbf{C}(\alpha) \cdot \beta) = e \cup \mathbf{C}(\alpha) \cdot \mathbf{C}(\beta) \cdot \beta.$$

Utilizînd instrumentul furnizat de sistemele tranziționale vom prezenta o altă abordare a teoremelor II.13.11, II.13.12, cunoscute în literatură sub numele de teoreme de sinteză ale automatelor.

Pentru aceasta este necesar să stabilim un rezultat preliminar în:

Teorema II.14.5. *Fie* $T = [I, S, f, \varepsilon; S_0]$ *un sistem tranzițional și* E_1 *un eveniment reprezentat în acest sistem prin mulțimea de stări* S_1. *Există un sistem tranzițional* $T' = [I, \{s_0'\} \cup S \cup \{s_1'\}, f', \varepsilon; s_0']$ *în care evenimentul* E_1 *este reprezentat prin starea* s_1' (vezi fig. II.14.4).

Demonstrație. Să definim f' și ε' prin

$$f'(s, i) = \begin{cases} f(s, i) \text{ dacă } s \in S \setminus S_1 \\ \varnothing, \text{ în caz contrar} \end{cases}$$

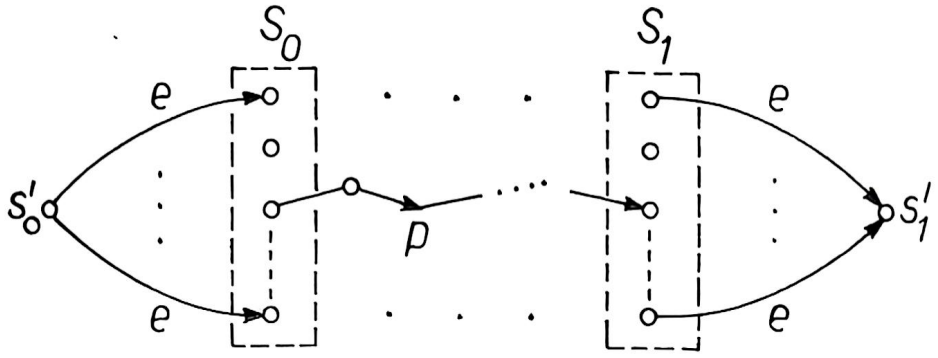


Fig. II.14.4

iar

$$\varepsilon' = \varepsilon \cup \{(s_0', s_0) \mid s_0 \in S_0\} \cup \{(s_1, s_1') \mid s_1 \in S_1\}.$$

Avem $\theta \subseteq \theta'$.

Să notăm cu E_1' evenimentul reprezentat în sistemul T' prin starea s_1'. Vom arăta că $E_1 = E_1'$.

Fie $p \in E_1$. Există $s_0 \in S_0$, $s_1 \in S_1$ astfel ca $(s_0, p, s_1) \in \theta$.

Deoarece $\{(s_0', s_0), (s_1, s_1')\} \subseteq \varepsilon'$, ținînd seama că $\theta \subseteq \theta'$ obținem $(s_0', p, s_1') \in \theta'$, adică $p \in E_1'$.

Reciproc, fie $p \in E_1'$. Atunci $(s_0', p, s_1') \in \theta'$. În baza definiției funcției f' și a relației ε' există $s_0 \in S_0$, $s_1 \in S_1$ astfel ca $(s_0', s_0) \in \varepsilon$, $(s_1, s_1') \in \varepsilon$ și $(s_0, p, s_1) \in \theta$, deci $p \in E_1$. ■

Consecința II.14.2. Dacă ne interesează problema reprezentării evenimentelor în sisteme tranziționale putem concepe aceste sisteme ca avînd o singură stare inițială. Un eveniment va putea fi reprezentat printr-o stare, fără reducerea generalității, fapt care-l vom folosi în cele ce urmează.

Teorema II.14.6. [Kleene[3], Harrisson[1]]. *Pentru orice expresie regulată* α *există un algoritm de construire a unui automat finit în care este reprezentat evenimentul* $|\alpha|$.

Demonstrație. În figura II.14.5 a-f sînt date sisteme tranziționale în care sînt reprezentate respectiv evenimentele regulate $\emptyset = |\emptyset|$, $\{e\} = |e|$, $\{i_j\} = \{\mathbf{i}_j\}$, $j = \overline{1, n}$, $|\mathbf{C}(\alpha)|$, $|\alpha| \cup |\beta|$, $|\alpha||\beta|$, unde α și β sînt expresii regulate reprezentate respectiv prin sistemele tranziționale T_α, T_β.

Aplicînd acestor sisteme tranziționale teorema II.14.2 obținem semiautomatele finite în care se reprezintă evenimentele precedente. ■

Fiind dat un eveniment regulat, teorema II.14.6 permite sintetizarea unui automat în care se reprezintă acest eveniment și de aceea ea este numită *teorema de sinteză*. Problema inversă a precizării evenimentului reprezentat într-un automat finit este rezolvată de *teorema de analiză* de care ne vom ocupa mai jos (teorema II.14.8).

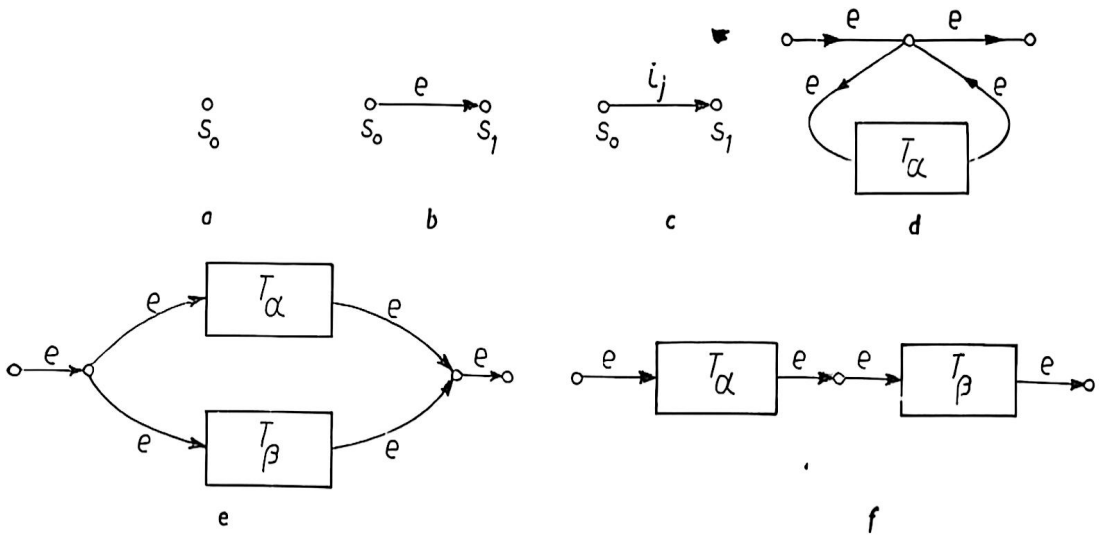


Fig. II.14.5

Pentru simplificarea expunerii ne vom mărgini la cazul limbajelor generate de un alfabet cu două litere $I = \{i_1, i_2\}$, fără a restrînge generalitatea.

Fie $A = [I, S, f; s_0]$, unde $I = \{i_1, i_2\}$, $S = \{s_0, \ldots, s_{n-1}\}$.

Definiția II.14.7. Pentru $k = \overline{0, n}$, familia de aplicații $\{\alpha^k \mid \alpha^k : S \times S \to \mathcal{L}\}$ este dată inductiv prin

$$\alpha^0(s_h, s_j) = \begin{cases} \mathbf{i}_1 \vee \mathbf{i}_2 \vee \mathbf{e}_{hj}, & \text{dacă } s_j = f(s_h, i_1) = f(s_h, i_2) \\ \mathbf{i}_1 \vee \mathbf{e}_{hj}, & \text{dacă } s_j = f(s_h, i_1) \neq f(s_h, i_2) \\ \mathbf{i}_2 \vee \mathbf{e}_{hj}, & \text{dacă } s_j = f(s_h, i_2) \neq f(s_h, i_1) \\ \mathbf{e}_{hj}, & \text{dacă } s_j \neq f(s_h, i_1) \text{ și } s_j \neq f(s_h, i_2), \end{cases}$$

unde

$$\mathbf{e}_{hj} = \begin{cases} \mathbf{e}, & \text{dacă } h = j \\ \emptyset, & \text{dacă } h \neq j, \end{cases}$$

și

(II.14.3) $$\alpha^k(s_h, s_j) = \alpha^{k-1}(s_h, s_j) \vee \alpha^{k-1}(s_h, s_k) \cdot \mathbf{C}(\alpha^{k-1}(s_k, s_k) \cdot \alpha^{k-1}(s_k, s_j)),$$

pentru $k \geqslant 1$.

Expresia regulată $\alpha^k(s_h, s_j)$ va fi notată în continuare cu α^k_{hj} și corespunzător formula (II.14.3) revine la:

(II.14.4) $$\alpha^k_{hj} = \alpha^{k-1}_{hj} \vee \alpha^{k-1}_{hk} \cdot \mathbf{C}(\alpha^{k-1}_{kk}) \cdot \alpha^{k-1}_{kj}.$$

Consecința II.14.3. Avem $\alpha^h_{hj} = \mathbf{C}(\alpha^{h-1}_{hj}) \cdot \alpha^{h-1}_{hj}$, și $\alpha^j_{hj} = \alpha^{j-1}_{hj} \cdot \mathbf{C}(\alpha^{j-1}_{jj})$.

Din formula (II.14.4),

$$\alpha^h_{hj} = \alpha^{h-1}_{hj} \vee \alpha^{h-1}_{hj} \cdot \mathbf{C}(\alpha^{h-1}_{hh}) \cdot \alpha^{h-1}_{hj} = (\mathbf{e} \vee \alpha^{h-1}_{hh} \cdot \mathbf{C}(\alpha^{h-1}_{hh})) \cdot \alpha^{h-1}_{hj} = \mathbf{C}(\alpha^{h-1}_{hh}) \cdot \alpha^{h-1}_{hj}.$$

Analog rezultă și a doua egalitate. ■

Teorema II.14.7. *Evenimentul* $|\alpha_{hj}^{k}|$ *este mulțimea cuvintelor prin care semiautomatul* A *trece din starea* s_h *în starea* s_j, *prin mulțimea de stări intermediare* $S' \subseteq S \setminus \{s_k, \ldots, s_{n-1}\}$.

Demonstrație. Vom proceda prin inducție după k. Pentru $k = 0$, teorema se verifică imediat, în baza definiției II.14.7.

Presupunem teorema adevărată pentru $k - 1$ și trecem la k.

Relativ la mulțimea stărilor intermediare, atunci cînd semiautomatul trece de la starea s_h la s_j distingem următoarele situații:

1. Starea s_k nu apare ca stare intermediară. Atunci $|\alpha_{hj}^{k}| = |\alpha_{hj}^{k-1}|$ și teorema se verifică în baza ipotezei inductive.

2. Starea s_k apare o singură dată ca stare intermediară. Drumurile ce duc de la s_h la s_j pot trece sau nu prin s_k. În primul caz cuvintele aparțin evenimentului $|\alpha_{hk}^{k-1}| \cdot |\alpha_{kj}^{k-1}|$, iar în al doilea caz evenimentului $|\alpha_{hj}^{k-1}|$.

Astfel

$$|\alpha_{hj}^{k}| = |\alpha_{hj}^{k-1}| \cup |\alpha_{hk}^{k-1}| |\alpha_{kj}^{k-1}|.$$

Dar $\alpha_{kk}^{k-1} = \oslash$, $\mathbf{C}(\oslash) = \mathbf{e}$ și $|\mathbf{C}(\alpha_{kk}^{k-1})| = \mathbf{e}$ și utilizînd relația (II.14.3) și ipoteza inductivă obținem relația dorită.

3. Starea s_k apare de multe ori ca stare intermediară. Fie p un cuvînt care realizează această transformare de stări. Se vede ușor că p se poate scrie $p = p_1 p_2 \ldots p_{l-1} p_l$ unde $p_1 \in |\alpha_{hk}^{k-1}|$, $p_2, \ldots, p_{l-1} \in |\alpha_{kk}^{k-1}|$ deci $p_2 \ldots p_{l-1} \in |\mathbf{C}(\alpha_{kk}^{k-1})|$ și $p_l \in |\alpha_{kj}^{k-1}|$. ■

Teorema II.14.8. *Fie* $A = [I, S, f; s_0]$, $|S| = n$ *și mulțimea de stări* $S_1 = \{s_{j_1}, \ldots, s_{j_m}\}$, $m \geqslant 0$. *Atunci expresia regulată*

$$\alpha_{S_1} = \begin{cases} \alpha_{0j_1}^{n} \vee \ldots \vee \alpha_{0j_m}^{n}, & \text{dacă } m > 0 \\ \oslash, & \text{dacă } m = 0, \end{cases}$$

generează evenimentul reprezentabil în semiautomatul A *prin mulțimea de stări* S_1.

Demonstrația este imediată în baza teoremei precedente. Vom observa doar că pentru $m = 0$, evenimentul reprezentat prin $S_1 = \oslash$ este evenimentul imposibil $\oslash$. ■

Consecința II.14.4. Există un algoritm care permite construirea, într-un număr finit de pași, a unei expresii regulate α pentru care $|\alpha|$ este un eveniment reprezentabil într-un semiautomat finit.

Într-adevăr, numărul expresiilor regulate α_{hj}^{k} nu depășește $n^2 (n + 1)$ ■.

Mulțimea evenimentelor regulate este caracterizată algebric în următorul rezultat datorat lui Kleene.

Teorema II.14.9. *Mulțimea* $\mathcal{R}(I)$ *este cea mai mică mulțime de evenimente cu următoarele trei proprietăți:*

1. *oricare ar fi evenimentul* $E\in\mathcal{P}(I^*), |E|<\infty$, $E\in\mathcal{R}(I)$,

2. *mulțimea* $\mathcal{R}(I)$ *este închisă la reuniunile finite și la produsul de evenimente,*

3. *dacă* $E\in\mathcal{R}(I)$, *atunci* $\mathbf{C}(E)\in\mathcal{R}(I)$.

Demonstrație. Să notăm cu Q cea mai mică mulțime de evenimente cu proprietățile 1, 2, 3. Vom arăta că $Q=\mathcal{R}(I)$.

Evident $Q\subseteq\mathcal{R}(I)$ deoarece Q este cea mai mică mulțime cu aceste proprietăți pe care le posedă și $\mathcal{R}(I)$, conform consecinței II.13.3 și teoremelor II.13.10,12,13.

Fie acum $E\in\mathcal{R}(I)$. Există o expresie regulată α astfel ca $|\alpha|=E$ (vezi teorema II.14.7). În baza teoremei de analiză II.14.8 expresia α se poate scrie $\alpha=\alpha^n_{0j_1}\vee\ldots\vee\alpha^n_{0j_m}$. Expresiile α^n_{0k} (vezi definiția II.14.7) au fost construite plecînd de la un număr finit de simboluri prin operațiile $\vee$, $\mathbf{C}$, $\cdot$; deci $|\alpha^n_{0k}|\in Q$ deoarece Q conține evenimentele finite și este închis la operațiile $\cup$, $\mathbf{C}$ și la produsul de evenimente. Prin urmare $|\alpha|=E\in Q$ și deci $\mathcal{R}(I)\subseteq Q$. ■

§ II.15. PROPRIETĂȚI DE STABILITATE ÎN AUTOMATE

Dispozitivele modelate de automate pot funcționa în mod defectuos în anumite momente. Prezintă interes de aceea studierea capacității acestor dispozitive de a limita în timp influența apariției unei erori.

Definiția II.15.1. Automatul $A=[I, S, O, f, g]$ este *slab k-stabil pe mulțimea de stări* $S_1\subseteq S$ dacă $\forall i\in I, p, q\in I^*$, $l(q)=k$ avem $g(S_1, pq)=g(S_1, q)$ și este *slab k-stabil* dacă este slab k-stabil pe orice mulțime de stări $S_1\in\mathcal{P}^*(S)$.

Observația II.15.1. Automatul A este slab k-stabil pe mulțimea de stări $S_1\subseteq S$, dacă $\forall i\in I, o\in O, p, r\in I^*$ cu $l(r)=k-1$, din $wo\in\gamma(S_1, pri)$ unde $w\in O^*$ rezultă existența unui $u\in O^*$ astfel că $uo\in\gamma(S_1, ri)$.

Definiția II.15.2. *Automatul* A este *k-stabil* dacă este slab k-stabil pe orice submulțime $S_1\subseteq S$ și există măcar o submulțime S' pe care automatul nu este slab $(k-1)$-stabil. Automatul este 1-stabil deci este slab 1-stabil pe orice submulțime de stări.

Definiția II.15.3. *Automatul* A este *stabil* dacă există $k\in N^*$ astfel ca A să fie k-stabil.

Observația II.15.2. Automatul A, k-stabil este $k+m$-stabil, $\forall m\in N$. Fie $r\in I^*$ cu $l(r)=k+m$. Atunci $r=r_1r_2$, unde $l(r_2)=k$. Avem $g(S_1, pr)=g(S_1, pr_1r_2)=g(S_1, r_2)=g(S_1, r_1r_2)=g(S_1, r)$. ■

Observația II.15.3. A este slab k-stabil pe $S_1 \subseteq S$ atunci și numai atunci cînd A este slab k-stabil pe $f(S_1, p)$ pentru oricare $p \in I^*$.

Într-adevăr, fie $r \in I^*$ cu $l(r) = k$ și $p, q \in I^*$. Avem $g(f(S_1, p), qr) = g(S_1, pqr) = g(S_1, r) = g(S_1, pr) = g(f(S_1, p), r)$. Pentru afirmația reciprocă este suficient să luăm $p = e$. ■

Observația II.15.4. Dacă A este slab k-stabil pe S_1 iar $p, q, r \in I^*$ cu $l(r) = k$; atunci $g(s, prq) = g(s, rq)$.

Într-adevăr, $g(s, prq) = g(s, u)$, unde u sînt ultimele k simboluri din cuvîntul rq. Apoi $g(s, rq) = g(s, u)$ și deci $g(s, prq) = g(s, rq)$. ■

Teorema II.15.1. *Fie* $S_1, S_2 \subseteq S$ și $(S_1, S_2) \in \rho$. *Dacă automatul* A *este slab* k*-stabil pe* S_1 *atunci* A *este slab* k*-stabil și pe* S_2.

Demonstrația este imediată. ■

Teorema II.15.2. *Proprietatea de stabilitate se păstrează prin epimorfisme.*

Demonstrație. Fie $\chi: A_1 \to A_2$ un epimorfism $\chi = (t, u, v)$. Să presupunem că A_1 este k-stabil și să considerăm $S''_2 \subseteq S_2$. Fie și $p'', r'' \in I_2^*$, $l(r'') = k$. Deoarece χ este epimorfism există $S'_1 \subseteq S_1$, $p', r' \in I_1^*$ cu $l(r') = k$ astfel ca $u(S'_1) = S''_2$, $t(p') = p''$, $t(r') = r''$. Avem $g_2(S''_2, p''r'') = g_2(u(S'_1), t(p'r')) = v(g_1(S'_1, p'r')) = v(g_1(S'_1, r')) = g_2(S''_2, r'')$. ■

Ne vom ocupa mai întîi de proprietățile specifice de stabilitate ale automatelor deterministe.

Observația II.15.5 Automatul determinist A, conex de starea s_0 și slab k-stabil pe s_0 este slab k-stabil pe orice stare.

Observația II.15.6. Automatul determinist A este slab k-stabil pe $\{s\}$ atunci și numai atunci cînd, pentru $\forall r \in I^*$, $l(r) = k - 1$ și $i \in I$ avem $g(f(s', r), i) = g(f(s, r), i)$, unde $s' \in f(s, I^*)$.

Teorema II.15.3. *Automatul determinist* A *este slab* k*-stabil pe* $\{s\}$ *dacă și numai dacă pentru orice* $r \in I^*$ *cu* $l(r) = k - 1$ *avem* $(f(s, r), f(s', r)) \in \rho$ *pentru orice* $s' \in f(s, I^*)$.

Demonstrație. Să presupunem că A este slab k-stabil pe $\{s\}$ și fie $r \in I^*$ cu $l(r) = k - 1$. Avem de arătat că $\forall s' = f(s, p)$ și $\forall q \in I^*$, $g(f(s, r), q) = g(f(s', r), q)$, ceea ce revine la $g(s, rq) = g(s', rq) = g(f(s, p), rq) = g(s, prq)$, egalitate adevărată în baza observației II.15.4.

Afirmația inversă este evidentă ■

Definiția II.15.4. *Automatul determinist* A este *slab* k*-definit pe* starea s dacă pentru $\forall p, r \in I^*$ cu $l(r) = k - 1$ avem $f(s, pr) = f(s, r)$.

Definiția II.15.5. *Automatul determinist* A este k*-definit* dacă este k-definit pe orice $s \in S$, dar există cel puțin un s' astfel ca A să nu fie $(k-1)$-definit pe s', sau pentru $k = 1$, A este 1-definit pe $\forall s \in S$.

Definiția II.15.6. *Automatul determinist A* este *definit (slab definit)* pe starea s dacă există $k \in N^*$ astfel ca A să fie k-definit (slab k-definit) pe s.

Noțiunile introduse prin definițiile II.15.4-6, care fac apel numai la funcția de tranziție sînt valabile și în cazul semiautomatelor.

Observația II.15.7. Automatul A slab k-definit pe s este slab k-stabil pe s.

Observația II.15.8. Dacă automatul A este redus el este slab k-stabil pe s dacă și numai dacă el este slab k-definit pe s.

Observația II.15.9. A este slab k-definit pe s dacă și numai dacă este slab k-definit pe orice $s' \in f(s, I^*)$.

A este slab k-definit pe s dacă și numai dacă $f(s', r) = f(s'', r)$, $\forall s'$, $s'' \in f(s, I^*)$ și $l(r) = k - 1$.

În vederea prezentării unui rezultat fundamental (teorema II.15.5) pentru problema de care ne ocupăm în acest paragraf vom introduce unele noțiuni preliminare.

Fie relația de echivalență θ_j definită pe mulțimea $f(s, I^*)$ prin

$$\theta_j = \bigcap_{\{p \mid l(p) \geqslant j-1\}} \ker f_p.$$

Remarcăm că $\theta_1 = \iota_{f(s, I^*)}$.

Observația II.15.10 Avem $\theta_1 \leqslant \theta_2 \leqslant \ldots \leqslant \theta_j \leqslant \theta_{j+1} \leqslant \ldots$

Din $\theta_j = \theta_{j+1}$ urmează $\theta_j = \theta_{j+n}$ oricare ar fi $n \in N$, iar dacă $\theta_j < \theta_{j+1}$ atunci $\theta_1 < \theta_2 < \ldots < \theta_{j-1} < \theta_j < \theta_{j+1}$.

Observația II.15.11. $(s_1, s_2) \in \theta_{j+1}$ dacă și numai dacă $(f(s_1, i), f(s_2, i)) \in \theta_j$, $\forall i \in I$.

Într-adevăr dacă $(f(s_1, i), f(s_2, i)) \in \theta_j$, atunci $\forall p \in I^*$ cu $l(p) \geqslant j - 1$, $f(f(s_1, i), p) = f(f(s_2, i), p)$, adică $f(s_1, ip) = f(s_2, ip)$, deci $(s_1, s_2) \in \theta_{j+1}$. Reciproca se arată la fel. ■

Teorema II.15.4. *Automatul A este slab k-definit pe s dacă și numai dacă* $\theta_k = \omega_{f(s, I^*)}$

Demonstrație. Dacă $\theta_k = \omega_{f(s, I^*)}$ atunci $\forall s_1, s_2 \in f(s, I^*)$ avem $f(s_1, r) = f(s_2, r)$, $\forall r \in I^*$ cu $l(r) \geqslant k - 1$. Luînd r astfel ca $l(r) = k - 1$, $s_1 = f(s, p)$ și $s_2 = s$ obținem

$$f(s, pr) = f(s, r),$$

$\forall p \in I^*$, $\forall r \in I^*$ și $l(r) = k - 1$, adică A este slab k-definit pe s.

Reciproc, dacă A este slab k-definit pe s, fie $s_1, s_2 \in f(s, I^*)$ adică $s_1 = f(s, q_1)$ și $s_2 = f(s, q_2)$. Fie și $r \in I^*$ cu $l(r) \geqslant k - 1$, $r = r_1 r'$ și $l(r') = k - 1$. Atunci $f(s_1, r) = f(s, q_1 r) = f(s, r') = f(s, q_2 r) = f(s_2, r)$. ■

Teorema II.15.5. [Perles, Rabin, Shamir [1]]. *Dacă automatul A este slab k-definit pe s sau slab k-stabil pe s atunci* $|S| \geqslant |f(s, I^*)| \geqslant k$.

Dacă $|f(s, I^*)| = m$ *și* A *este definit pe* s *sau stabil pe* s *atunci* A *este slab* m*-definit pe* s *respectiv slab* m*-stabil pe* s.

Demonstrație. Vom arăta mai întîi că dacă A este k-definit pe s atunci $|f(s, I^*)| \geqslant k$.

Pentru $k = 1$, din $s \in f(s, I^*)$ rezultă $|f(s, I^*)| \geqslant 1$.

Fie $k \geqslant 2$ și A slab k-definit pe s și nu slab $(k-1)$ definit. Avem $\theta_{k-1} \neq \theta_k$ (conform teoremei II.15.4) și cum $\theta_1 \neq \theta_2 \ldots \theta_{k-1} \neq \theta_k = \theta_{k+1}$ avem

$$|f(s, I^*)/\theta_1| > |f(s, I^*)/\theta_2| > \ldots |f(s, I^*)/\theta_{k-1}| > |f(s, I^*)/\theta_k| = 1,$$

de unde

$$|(f(s, I^*)/\theta_1| \geqslant k,$$

ceea ce implică $|f(s, I^*)| \geqslant k$.

Dacă A este k-stabil pe S atunci automatul redus A/ρ este k-definit în starea $[s]$, conform teoremei II.15.1 și a observației II.15.8.

Din cele de mai sus rezultă $|f_\rho([s], I^*)| \geqslant k$ și cum $|f(s, I^*)| \geqslant |f_\rho([s], I^*)|$ avem $|f(s, I^*)| \geqslant k$.

Dacă $|f(s, I^*)| = m$ atunci cel mult pentru $k = m$ avem $\theta_k = \omega_{f(s, I^*)}$. ■

Consecința II.15.1. Definirea și stabilitatea pentru automate finite sînt proprietăți decidabile.

Deoarece există automate deterministe pentru care $|f(s, I^*)| = k$, automatul fiind slab k-stabil pe s sau slab k-definit pe s (așa cum va rezulta din exemplul următor) marginea din teorema II.15.5 nu poate fi ameliorată.

Exemplul II.15.1. [Starke [7]]. Fie automatul $A = [\{i\}, \{0, 1, \ldots, n\}, \{0, 1\}, f, g]$ unde

$$f(k, i) = \begin{cases} 0, \text{ dacă } k = 0 \\ k-1, \text{în caz contrar,} \end{cases} \text{ și } g(k, i) = \begin{cases} 1, \text{ dacă } k = 0 \\ 0, \text{ în caz contrar.} \end{cases}$$

Automatul A este $(n+1)$-definit pe starea n.

Într-adevăr, $f(k, i^m) = 0$ pentru toți i^m cu $m \geqslant n$, și $\forall k \in S$, deci în particular $f(n, i^m) = 0 = f(n, i^n)$, adică A este slab $(n+1)$ - definit pe n.

Pe de altă parte automatul A nu-i slab n-definit pe starea n, deoarece $0 = f(n, i^n) \neq f(n, i^{n-1}) = 1$.

Rămîne de observat că $|f(n, I^*)| = |\{0, 1, \ldots, n\}| = n + 1$.

Fie $A = [I, S, O, f, g]$ un automat determinist și $s \in S$. Pe mulțimea $f(s, I^*)$ introducem un șir de relații de echivalență $\{\lambda_j\}_{j \in N^*}$ unde

$$\lambda_j = \bigcap_{\{p \mid l(p) \geqslant j-1\}} \ker g_p$$

Observația II.15.12. Avem $\theta_{j-1} \leqslant \lambda_j$. Într-adevăr, dacă $(s_1, s_2) \in \theta_{j-1}$, atunci $f(s_1, p) = f(s_2, p)\ \forall p,\ l(p) \geqslant j-2$. Dar atunci $g(s_1, pi) = g(f(s_1, p), i) = g(f(s_2, p), i) = g(s_2, pi)$; deci $(s_1, s_2) \in \lambda_j$. ■

Observația II.15.13. Avem $\lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \ldots \leqslant \lambda_j \leqslant \ldots$ și se arată ușor că din $\lambda_j = \lambda_{j+1}$, urmează $\lambda_j = \lambda_{j+k}$, $\forall k \in N$, iar dacă $\lambda_j \neq \lambda_{j+1}$ atunci $\lambda_1 < \lambda_2 < \ldots < \lambda_j < \lambda_{j+1}$. În sfîrșit remarcăm că $\lambda_1 = \rho$.

Teorema II.15.6. *Automatul* $A = [I, S, O, f, g]$ *este slab* k*-stabil pe starea* s *dacă și numai dacă* $\lambda_{k+1} = \omega_{f(s,I^*)}$.

Demonstrație. Fie A slab k-stabil pe s. Atunci $g(s, pq) = g(s, q)$, $\forall q$ cu $l(q) = k$. Fie $s_1, s_2 \in f(s, I^*)$, deci $s_1 = f(s, r_1)$ și $s_2 = f(s, r_2)$.

Urmează că pentru orice $p' \in I^* \setminus I^{*k-1}$, $g(s, r_1 p') = g(s, r_2 p')$, deci $g(s_1, p') = g(s_2, p')$, adică $(s_1, s_2) \in \lambda_{k+1}$. Reciproca se obține în mod evident. ■

Teorema II.15.7. *Fie automatul* A *pentru care există* s *astfel ca* $|f(s, I^*)/\rho| = k_s < \infty$. *Dacă* A *este stabil pe* s *atunci el este slab* k_s*-stabil pe* s.

Demonstrație. Fie A k-stabil pe s. Avem de arătat inegalitatea $k_s \geqslant k$. Pentru $k = 1$ inegalitatea este evidentă.

Să presupunem acum $k \geqslant 2$. Automatul A fiind k-stabil pe r este și slab k-stabil pe s, prin urmare $\lambda_{k+1} = \omega_{f(s,I^*)}$. Deoarece A nu este slab $(k-1)$-stabil pe s, $\lambda_k < \omega_{f(s,I^*)}$ și $|f(s, I^*)/\lambda_k| \geqslant 2$. În baza observației II.15.13 $|f(s, I^*)/\lambda_1| > |f(s, I^*)/\lambda_2| > \ldots > |f(s, I^*)/\lambda_k| \geqslant 2$ de unde $|f(s, I^*)/\lambda_1| = |f(s, I^*)/\rho| \geqslant k + 1$. ■

Noțiunile și rezultatele legate de stabilitate se pot extinde la automate nedeterministe folosind macroautomatul atașat.

Observația II.15.14. Automatul nedeterminist $A = [I, S, O, f, g]$ are proprietatea de slabă k-stabilitate (k-stabilitate sau stabilitate) pe mulțimea de stări $S_1 \subseteq S$ dacă și numai dacă macroautomatul $M(A) = [I, \mathcal{P}^*(S), \mathcal{P}^*(O), F, G]$ are proprietatea respectivă pe starea S_1. Aceeași observație subzistă și pentru proprietățile de definire.

Observația II.15.15. Teorema lui Perles, Rabin și Shamir (II.15.5) ne permite să afirmăm că dacă automatul nedeterminist A este slab k-definit sau slab k-stabil pe o mulțime de stări S_1, atunci avem $2^{|S|} - 1 \geqslant |f(S_1, I^*)| \geqslant k$, de unde obținem $|S| \geqslant \log_2 (k + 1)$.

Vom formula acum noțiunile legate de stabilitate în cadrul operatorilor secvențiali și al evenimentelor.

Definiția II.15.7. *Operatorul secvențial* φ pe (I, O) este *(slab) k-stabil* dacă φ poate fi realizat printr-o stare s într-un automat (slab) k-stabil pe s.

Teorema II.15.8. *Fie* $\varphi \in$ **Secv** (I, O). φ *este slab* k*-stabil dacă* $\forall r$ cu $l(r) = k - 1$ *avem* $\varphi_{pr} = \varphi_r$, $\forall p \in I^*$.

Demonstrație. Fie $A = [I, S, O, f, g]$ automatul slab k-stabil pe s în care φ este realizat de s. Conform teoremei II.10.4 operatorii φ_{pr} și φ_r sînt realizați în A respectiv prin $f(s, pr)$ și $f(s, r)$.

Dar, din teorema II.15.3 rezultă că stările $f(s, r)$ și $f(s, pr)$ sînt echivalente și deci generează același operator secvențial. ■

Teorema II.15.9. *φ este (slab) k-stabil dacă și numai dacă automatul A^φ* (vezi teorema II.10.3) *este (slab) k-stabil.*

Demonstrație. φ este realizat de starea φ_e în automatul A^φ. Cum A^φ este conex de starea φ_e, ținînd seama de observația II.15.5, A^φ este (slab) k-stabil dacă și numai dacă φ este (slab) k-stabil. ■

Teorema II.15.10. *Dacă φ este k-stabil atunci $|S^\varphi| \geqslant k$.*

Demonstrație. Automatul A^φ este k-definit, deoarece el este redus și k-stabil și deci, conform teoremei II.15.5, $|S^\varphi| \geqslant k$. ■

Teorema II.15.11. *Dacă I este finit și φ k-stabil, atunci $k \leqslant |S^\varphi| \leqslant (|I|^k - 1)/(|I| - 1)$.*

Demonstrație. Teorema II.15.6 ne asigură că automatul A^φ are cel mult $1 + |I| + \ldots + |I|^{k-1} = (|I|^k - 1)/(|I| - 1)$ stări distincte. ■

Definiția II.15.8. Un *eveniment $E \subseteq I^*$* este *(slab) k-definit* cînd există un semiautomat inițial $A = [I, S, f; s]$ care este (slab) $(k+1)$-definit pe s_0 și în care evenimentul E este reprezentat.

Structura evenimentelor k-definite este descrisă în:

Teorema II.15.12. *Evenimentul E este slab k-definit dacă și numai dacă $E = E_1 \cup I^* E_2$, unde $E_1 = \{p \mid p \in E \cap I^{*k}\}$ și $E_2 = \{p \mid p \in E \cap I^k\}$.*

Demonstrație. Fie E slab k-definit și semiautomatul $A = [I, S, f; s_0]$ în care E este reprezentat prin mulțimea de stări S_1, adică $p \in E \leftrightarrow f(s_0, p) \in S_1$.

Fie $r \in E$ cu $l(r) = k$. Cuvîntul $pr \in E$, $\forall r \in I^*$, deoarece $f(s_0, pr) = f(s_0, r) \in S_1$.

Reciproc, dacă $E = E_1 \cup I^* E_2$ vom construi un semiautomat A_E în care E este reprezentat și A_E este slab $(k+1)$-definit pe starea inițială.

Fie $A_E = [I, S_E, f_E; e]$ unde $S_E = \{p \mid p \in I^{*k}\}$ și

$$f_E(p, i) = \begin{cases} pi, \text{ dacă } l(p) < k \\ e, \text{ dacă } p = e \text{ și } k = 0 \\ i_2 \ldots i_k i, \text{ dacă } p = i_1 i_2 \ldots i_k \text{ și } l(p) = k \geqslant 1. \end{cases}$$

Funcția f_E se prelungește la I^* în mod natural.

Evenimentul E este reprezentat în semiautomatul A_E prin mulțimea de stări $S'_E = E_1 \cup E_2$. Astfel, dacă $p \in E$ și $l(p) \leqslant k$ atunci $f_E(e, p) = p \in E_1$, iar dacă $l(p) > k$ atunci $f_E(e, p) = p_2 \in E_2$ unde $p = p_1 p_2$ și $l(p_2) = k$. Invers, dacă $f_E(e, p) \in E_1 \cup E_2$ urmează ca $p \in E_1$, dacă $l(p) \leqslant k$ sau $p \in I^* E_2$ dacă $l(p) > k$.

Automatul A_E este slab $(k+1)$-definit pe E deoarece pentru orice $p, r \in I^*$ cu $l(r) = k$ avem $f_E(e, pr) = r = f_E(e, r)$.

Consecința II.15.2. Dacă evenimentul $E \subseteq I^*$ este slab k-definit și $|I| < \infty$ atunci $E \in \mathcal{R}(I)$, deoarece A_E este un semiautomat finit.

Consecința II.15.3. Un eveniment finit este slab k-definit pentru $k = 1 + \max_{p \in E} l(p)$.

§ II. 16. EXPERIMENTE CU AUTOMATE

Fie un automat slab inițial $A = [I, S, O, f, g; S_1]$ cu $|S_1| \geqslant 2$.

Să presupunem că nu cunoaștem starea automatului la momentul inițial; știm doar că ea aparține mulțimii $S_1 \subseteq S$.

Vom încerca să găsim starea inițială prin efectuarea unor *experimente* asupra automatului, care vor consta din introducerea unor semnale de intrare convenabil alese și observarea semnalelor de ieșire corespunzătoare sau prin unele *procedee speciale*, ca cel descris mai jos.

Să atașăm în acest scop automatului A, automatul inițial Starke [7], $E(A; i_1) = [O, \bar{S}, S_1 \cup' I \cup \{*\}, \bar{f}, \bar{g}, i_1]$, unde $\bar{S}$, $\bar{f}$ și $\bar{g}$ vor fi precizați mai tîrziu. Să observăm că $i_1 \in \bar{S}$. Pentru simplitate introducem următoarele notații pentru un $s \in S_1$:

$$i_1^s = i_1$$

$$o_1^s = g(s, i_1),$$

$$i_2^s = g(i_1, o_1^s),$$

și pentru $j \geqslant 2$, $s \in S_1$,

$$o_j^s = \begin{cases} g(s, i_1^s \ldots i_{j-1}^s i_j^s), \text{ dacă } i_1^s, \ldots, i_j^s \in I \\ * \quad \text{în caz contrar,} \end{cases}$$

$$i_{j+1}^s = \begin{cases} \bar{g}(i_1, o_1^s \ldots o_{j-1}^s o_j^s), \text{ dacă } o_1^s, \ldots, o_j^s \neq * \\ *, \text{ în caz contrar.} \end{cases}$$

Dacă există $n \in N^*$ astfel ca $o_n^s = *$ pentru $s \in S_1$, iar pentru orice $s \in S_1$ există j, $1 \leqslant j \leqslant n$ astfel ca $i_j^s = s$ (ceea ce se poate realiza atunci cînd pot fi definite convenabil funcțiile $\bar{f}$ și $\bar{g}$) automatul $E(A; i_1)$ permite identificarea stării inițiale a automatului A.

Acest lucru poate fi realizat astfel: introducem în automatul A semnalul de intrare i_1; obținem semnalul de ieșire $o_1^s = g(s, i_1) \in O$, pe care-l introducem în automatul $E(A; i_1)$ care se află în starea inițială i_1. Acesta emite un semnal $i_2^s = g(i_1, o_1^s) \in S_1 \cup' I$. Apoi semnalul i_2^s este introdus în automatul A care va emite semnalul $o_2^s = g(f(s, i_1^s), i_2^s) = g(s, i_1^s, i_2^s) \in O$ etc. După un număr finit de pași automatul $E(A; i_1)$ emite semnalul $i_j^s = s$ care nu mai poate fi introdus la intrarea automatului și procedeul se termină, starea inițială fiind găsită.

Exemplul II.16.1. [Starke [7]] Fie automatul $A = [\{0, 1, 2\}, \{a, b, c, d, h\}, \{0, 1\}, f, g; \{a, b, c, d\}]$ al cărui graf este reprezentat în fig. II.16.1.

Să considerăm acum automatul $E(A; i_1) = [\{0, 1\}, \{O, A, B\}, \{a, b, c, d, 0, 1, 2\}, \bar{f}, \bar{g}; O]$ reprezentat de graful din fig. II.16.2.

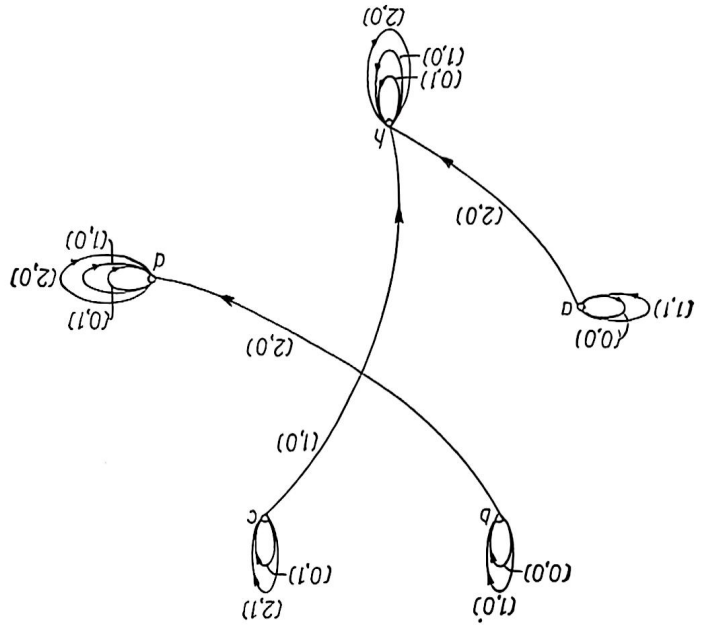


Fig. II.16.1

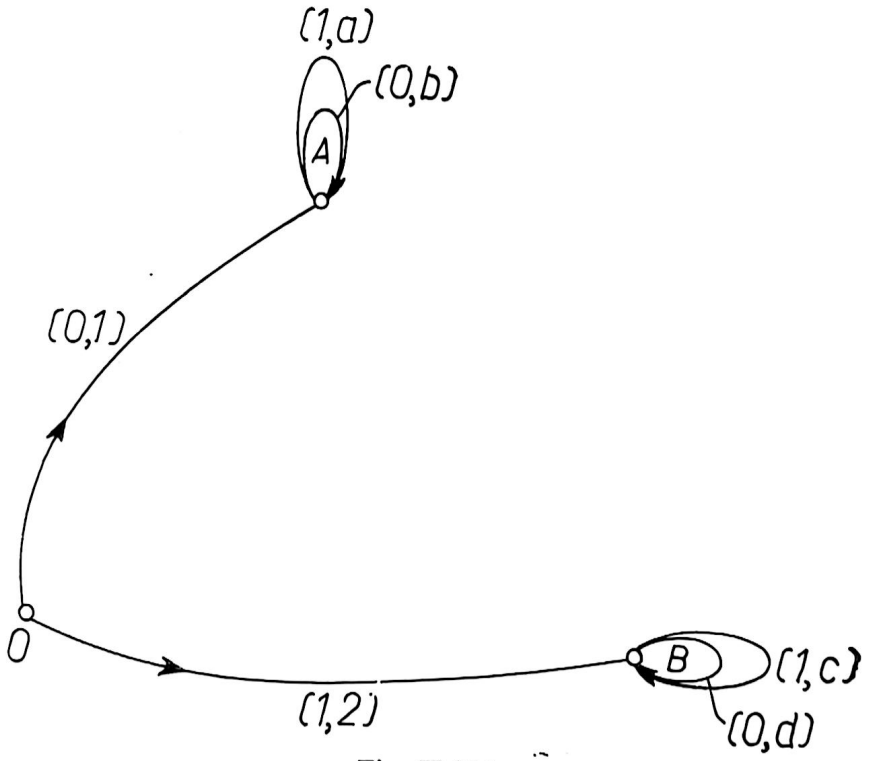


Fig. II.16.2

Avem

$$i_1^s = 0, \qquad \forall\, s \in S_1,$$
$$o_1^a = o_1^b = 0, \quad o_1^c = o_1^d = 1,$$
$$i_2^a = i_2^b = 1, \quad i_2^c = i_2^d = 2,$$
$$o_2^a = 1,\ o_2^b = 0, \quad o_2^c = 1,\ o_2^d = 0,$$
$$i_3^a = a,\ i_3^b = b, \quad i_3^c = c,\ i_3^d = d.$$

Deci, în trei pași obținem starea inițială a automatului A.

Observația II.16.1. Dacă pentru automatul slab inițial A există un procedeu oarecare de identificare, atunci în mod necesar stările mulțimii S_1 sînt neechivalente.

Procedeele aplicate pentru identificarea stării inițiale le vom numi *procedee de specia I*. Procedeele care permit determinarea stării în care trece automatul la tactul $t+1$, după observarea activității automatului în primele t tacte poartă numele de *procedee de specia a II-a*.

Definiția II.16.1. *Lungimea unui procedeu* este numărul maxim de tacte în care procedeul permite rezolvarea problemei puse.

Corespunzător procedeelor de cele două specii distingem experimente de specie întîi și de specia a doua.

Observația II.16.2. Existența unui experiment care identifică starea inițială s_1 antrenează existența unui experiment de specia a doua și anume, după experiment automatul se va găsi în starea $f(s_1, p)$ unde p este cuvîntul introdus prin experimentul considerat.

Fie $A = [I, S, O, f, g; S_1]$ un automat slab inițial cu $|S_1| \geqslant 2$. Putem presupune fără a restrînge generalitatea că $S = f(S_1, I^*)$ deoarece altfel am considera subautomatul $[I, f(S_1, I^*), O, f|_{f(S_1,I^*)\times I}, g|_{g(S_1,I^*)\times I}; S_1]$.

Să considerăm aplicația $U: I^* \to \mathcal{P}^*(O^*)$ dată prin:

$$U(p) = \gamma(S_1, p), \tag{II.16.1}$$

vezi observația II.10.1).

Definiția II.16.2. Un cuvînt $p \in I^*$ realizează un experiment de specia I pentru automatul A dacă aplicația $\gamma_p\colon S_1 \to O^*$ definită de $\gamma_p(s) = \gamma(s, p)$, $\forall\, s \in S_1$, este biunivocă.

Aplicația γ_p fiind biunivocă putem găsi starea inițială a automatului ca fiind preimaginea cuvîntului generat la ieșire. Vom nota cu $E_j(A) \subseteq I^*$, mulțimea cuvintelor care realizează experimente de specia j pentru automatul A, $j = 1, 2$.

Observația II.16.3. Dacă p realizează un experiment de specia întîi, atunci $s_1 \neq s_2$ implică $\gamma(s_1, p) \neq \gamma(s_2, p)$.

Observația II.16.4. Pentru automate S-finite, cuvîntul p realizează un experiment de specia întîia dacă și numai dacă $|U(p)| = |S_1|$.

Observația II.16.5. Dacă $p \in E_1(A)$ atunci $pr \in E_1(A)$, $\forall r \in I^*$.
Deoarece $\gamma_s(p) = \gamma_p(s)$, din formula (II.10.3) rezultă

$$\gamma_{pr}(s) = \gamma_p(s)\ \gamma_r(f(s, p)). \tag{II.16.2}$$

Ca atare, $s_1 \neq s_2$ implică $\gamma_p(s_1) \neq \gamma_p(s_2)$ (deoarece p realizează un experiment) și, cu atît mai mult $\gamma_{pr}(s_1) \neq \gamma_{pr}(s_2)$. ■

Observația II.16.6. Să presupunem că $p \in E_1(A)$ și $|O| < \infty$. Atunci $U(p) \subseteq O^{l(p)}$ și deci este finit și, cu atît mai mult S_1 este finit.
Să studiem în continuare problema existenței unui experiment de specia întîi pentru un automat slab-inițial $A = [I, S, O, f, g; S_1]$ cu $|S_1| \geqslant 2$ și $S = f(S_1, I^*)$. Introducem funcția $\zeta: I^* \to \mathrm{Eq}(S)$ prin $\zeta(p) = \ker \gamma_{\tilde{p}}$.

Teorema II.16.1. *Relațiile definite prin funcția ζ se bucură de următoarele proprietăți:*

1. $\forall\, s_1, s_2 \in S$, $(s_1, s_2) \in \zeta(e)$, *adică* $\zeta(e) = \omega_S$,
2. $(s_1, s_2) \in \zeta(pi) \leftrightarrow (s_1, s_2) \in \ker \gamma_t \wedge (f(s_1, i), f(s_2, i)) \in \zeta(p)$,
3. *Dacă* $(p_1, p_2) \in \ker \zeta$ *atunci* $(p_1 q, p_2 q) \in \ker \zeta$, $\forall\, q \in I^*$.

Demonstrație.

1. Deoarece $\tilde{e} = e$ și $\gamma_{\tilde{e}}(s_1) = \gamma_{\tilde{e}}(s_2) = e$, $\forall s_1, s_2 \in S$ avem $\forall (s_1, s_2) \in \zeta(e)$.

2. Dacă $(s_1, s_2) \in \zeta(pi)$ avem $\gamma(s_1, i\tilde{p}) = \gamma(s_2, i\tilde{p})$, sau $\gamma(s_1, i)\ \gamma(f(s_1, i), \tilde{p}) = \gamma(s_2, i)\ \gamma(f(s_2, i), \tilde{p})$ și cum $l(r(s, q)) = l(q)$, $\forall\, q \in I^*$ rezultă $\gamma(s_1, i) = \gamma(s_2, i)$ și $\gamma(f(s_1, i), \tilde{p}) = \gamma(f(s_2, i), \tilde{p})$, deci $(s_1, s_2) \in \ker \gamma_i$ și $(f(s_1, i), f(s_2, i)) \in \zeta(p)$.

Demonstrația implicației inverse se face parcurgînd în sens invers argumentația de mai sus.

3. Este suficient să arătăm că din $\zeta(p) = \zeta(q)$ urmează $\zeta(pi) = \zeta(qi)$, $\forall\, i \in I$.
Fie $(s_1, s_2) \in \zeta(pi)$; conform cu punctul 2. urmează $(s_1, s_2) \in \ker \gamma_i$ și $(f(s_1, i), f(s_2, i)) \in \zeta(p)$ și atunci $(s_1, s_2) \in \ker \gamma_i$ și $(f(s_1, i), f(s_2, i)) \in \zeta(q)$, de unde $(s_1, s_2) \in \zeta(qi)$. ■

Teorema II.16.2. *Un cuvînt $p \in I^*$ realizează un experiment de specia întîi pentru automatul A dacă și numai dacă $\zeta(\tilde{p}) \cap \omega_{S_1} < \iota_{S_1}$.*

Demonstrație. Fie $(s_1, s_2) \in \zeta(\tilde{p})$ și $s_1, s_2 \in S_1$. Atunci $\gamma(s_1, p) = \gamma(s_2, p)$ și deci $s_1 = s_2$, deoarece p realizează un experiment de specia I și deci $\zeta(\tilde{p}) \cap \cap \omega_{S_1} \subseteq \iota_{S_1}$. Reciproc, dacă $\zeta(\tilde{p}) \cap \omega_{S_1} \subseteq \iota_{S_1}$ atunci din $(s_1, s_2) \in \zeta(\tilde{p})$ rezultă $s_1 = s_2$ și deci aplicația $\gamma_p | s_1$ fiind biunivocă p realizează un experiment de specia întîia (vezi definiția II.16.2). ■

Observația II.16.7. Nu toate relațiile de echivalență ζ cu proprietatea $\zeta \cap \omega_{S_1} \subseteq \iota_{S_1}$ sînt generate de cuvinte din I^*. Vom nota cu $\mathrm{Eq}(S/S_1)$ mulțimea relațiilor de echivalență care se bucură de această proprietate.

Teorema II.16.3. *Dacă mulțimile I și S ale automatului $A = [I, S, O, f, g; S_1]$ sînt finite, atunci mulțimea $E_1(A)$ este un eveniment regulat și problema existenței unui experiment de specia I este o proprietate decidabilă.*

Demonstrație. Dacă $|S| < \infty$, mulțimea $\mathrm{Eq}(S)$ este finită și, cu atît mai mult $|\zeta(I^*)| < \infty$ și $|\mathrm{Eq}(S/S_1)| < \infty$.

Să considerăm semiautomatul $A_\zeta = [I, \zeta(I^*), f_\zeta; \zeta(e)]$ cu $f_\zeta(\zeta(p), i) = \zeta(pi)$. Remarcăm că definiția aceasta este bine construită în baza teoremelor II.16.1, 2 și $f_\zeta(\zeta(e), p) = \zeta(p)$, $\forall p \in I^*$.

Atunci $E_1(A) = \{\widetilde{p} \mid p \in E_1(A)\}$ este evenimentul reprezentat în acest semiautomat prin mulțimea de stări $\zeta(I^*) \cap \mathrm{Eq}(S/S_1)$, ceea ce rezultă imediat din teorema II.16.2.

Conform teoremei II.13.7, $E_1(A)$ este un eveniment regulat și ținînd seama de teorema II.13.15 există un algoritm care ne arată dacă $E_1(A) \neq \emptyset$, adică care ne precizează existența unui experiment de specia întîi. ■

Observația II.16.8. Construcția inductivă indicată în teorema II.16.1 ne permite determinarea efectivă a mulțimii $\zeta(I^*)$.

Exemplul II.16.2. Să reluăm automatul din exemplul II.16.1 care admite un procedeu de determinare a stării inițiale. Vom arăta că pentru acest automat $E_1(A) = \emptyset$, adică nu există nici un experiment de identificare de specia I.

Vom descrie relațiile de echivalență din $\zeta(I^*)$ cu ajutorul părților corespunzătoare, punînd pentru simplitate $\pi(p) = \pi_{\zeta(p)}$. Avem:

$$\pi(e) = \{\{a, b, c, d, h\}\}$$

$$\pi(0) = \{\{a, b\}, \{c, d, h\}\}, \pi(1) = \{\{a\}, \{b, c, d, h\}\},$$

$\pi(2) = \{\{a, b, d, h\}, \{c\}\}$, $\pi(00) = \pi(0), \pi(01) = \{\{a\}, \{b\}, \{c, d, h\}\}, \pi(02) =$

$= \pi(2), \pi(10) = \pi(01), \pi(11) = \pi(1), \pi(12) = \pi(2), \pi(20) = \{\{a, b\}, \{c\}, \{d, h\}\},$

$\pi(21) = \pi(1), \pi(22) = \pi(2), \pi(010) = \pi(01), \pi(011) = \pi(01), \pi(012) = \pi(2),$

$\pi(200) = \pi(20), \pi(201) = \pi(01), \pi(202) = \pi(2)$, deci $\zeta(I^*) = \{\zeta(e), \zeta(0), \zeta(1),$

$\zeta(2), \zeta(01), \zeta(20)\}$ și se verifică imediat că $\pi(p) \in \zeta(I^*)$, $\forall p \in I^*$ cu $l(p) =$

$= 4$. Ca atare $\zeta(I^*) \cap \mathrm{Eq}(S/S_1) = \emptyset$.

Ne vom ocupa în continuare de evenimentul $E_2(A)$, adică de mulțimea cuvintelor care realizează experimente de specia a doua.

Teorema II.16.4. *Cuvîntul p realizează un experiment de specia a II-a pentru automatul slab inițial $A = [I, S, O, f, g; S_1]$ dacă există o aplicație $\Psi: U(p) \to S$ astfel ca*

$$\Psi(\gamma(s_1, p)) = f(s_1, p), \ \forall s_1 \in S_1.$$

Demonstrație. Rezultă imediat din definiția experimentului de specia a doua. (vezi formula (II.16.1)). ■

În legătură cu problema existenței experimentelor de specia a II-a pentru automatul $A = [I, S, O, f, g; S_1]$ vom introduce aplicația τ prin:

Definiția II.16.3. Aplicația $\tau : I^* \to \mathcal{P}(\mathcal{P}(S))$ este dată inductiv de

$$\tau(e) = \{S_1\},$$

$$\tau(pi) = \{S' \mid |S| \geqslant 2 \wedge \exists\, S'' \in \tau(p), o \in O, S' = \{s' \mid s' = f(s'', i), s'' \in S'', o = g(s'', i)\}\}.$$

Teorema II.16.5. *Fie $A = [I, S, O, f, g; S_1]$ un automat slab inițial. Pentru $s', s'' \in S$, $s' \neq s''$ și $p \in I^*$ avem $\{s', s''\} \subseteq S_p \in \tau(p)$ dacă și numai dacă există $s_1, s_2 \in S_1$ astfel ca $\gamma(s_1, p) = \gamma(s_2, p)$ și $s' = f(s_1, p)$, $s'' = f(s_2, p)$.*

Demonstrație. Vom proceda prin inducție după $l(p)$. Pasul inițial ($p = e$) este banal. Presupunem adevărată teorema pentru p și trecem la cuvîntul pi.

Fie $s', s'' \in S$ și $s' \neq s''$. Atunci există $S_{pi} \in \tau(pi)$ cu $\{s', s''\} \subseteq S_{pi}$ dacă și numai dacă $\exists\, S_p \in \tau(p)$, $o \in O$ astfel ca

$$s' = f(s', i) \text{ și } s'' = f(s'', i), \{\bar{s}', \bar{s}''\} \subseteq S_p, \ o = g(\bar{s}', i) = g(\bar{s}'', i),$$

ținînd seama de faptul că

$$S_{pi} = \{s \mid s = f(\bar{s}, i), \ \bar{s} \in S_p, o = g(\bar{s}, i)\}.$$

În baza ipotezei inductive există $\bar{s}_1, \bar{s}_2 \in S_1$ astfel ca $\gamma(\bar{s}_1, p) = \gamma(\bar{s}_2, p)$ și $\bar{s}' = f(\bar{s}_1, p)$, $\bar{s}'' = f(\bar{s}_2, p)$, prin urmare
$s' = f(\bar{s}_1, pi)$, $\bar{s}'' = f(\bar{s}_2, pi)$ și $\gamma(\bar{s}_1, pi) = \gamma(\bar{s}_2, pi)$. ■

Teorema II.16.6. *Dacă $S_p = S_r$ atunci $S_{pq} = S_{rq}$, oricare ar fi $p, q, r \in I^*$.*

Demonstrație. Vom proceda prin inducție după $l(q)$. Pasul inițial ($q = e$) este evident.

Presupunem egalitatea satisfăcută pentru q și trecem la cuvîntul qi. Avem $S_{pqi} = \{s \mid s = f(\bar{s}, i), \ \bar{s} \in S_{pq}, \ o = g(\bar{s}, i)\} = \{s \mid s \in f(\bar{s}, i), \ \bar{s} \in S_{rq}, \ o = g(s, i) = S_{rqi}\}$. ■

Teorema II.16.7. *Cuvîntul p realizează un experiment de specia a doua pentru automatul A dacă și numai dacă $S_p = \emptyset$.*

Demonstrație. Dacă $S_p \neq \emptyset$ deoarece $|S_p| \geqslant 2$ (vezi definiția II.16.3) există $s', s'' \in S_p$ cu $s' \neq s''$, dar ținînd seama de teorema II.16.5 $s' = f(s_1', p)$ și $s'' = f(s_1'', p)$, $\gamma(s_1', p) = \gamma(s_1'', p)$, $s_1', s_1'' \in S_1$.

Deoarece p realizează un experiment de specia a doua din $\gamma(s_1', p) = \gamma(s_1'', p)$ pentru $s_1', s_2'' \in S_1$ și $s_1' = s_1''$ urmează $f(s_1', p) = f(s_1'', p)$, ceea ce contrazice $|S_p| \geqslant 2$, deci $S_p = \emptyset$.

Reciproc, dacă $S_p = \emptyset$ și $\gamma(s_1', p) = \gamma(s_1'', p)$, pentru $s_1', s_1'' \in S_1$ și $s_1' \neq s_1''$ atunci avem $f(s_1', p) = f(s_1'', p)$ (altminteri stările $f(s_1', p)$, $f(s_1'', p)$ ar aparține lui S_p). Rezultă că p realizează un experiment de specia a doua. ■

Să considerăm acum semiautomatul inițial $\tilde{A} = [I, \tilde{S}, \tilde{f} : \tilde{s}_0]$, în care $\tilde{S} = \{\tau(p) \mid p \in I^* \cup \{\emptyset\}\}$, $\tilde{f}(\tau(p), i) = \tau(pi)$, $\tilde{f}(\{\emptyset\}, i) = \{\emptyset\}$, iar $\tilde{s}_0 = \tau(e)$. Pentru extinderea funcției $\tilde{f}$ avem $\tilde{f}(\tau(p), q) = \tau(pq)$.

Teorema II.16.8. *Evenimentul $E_2(A)$ este evenimentul reprezentat în automatul $\tilde{A}$ prin starea $\{\emptyset\}$.*

Demonstrație. Fie E evenimentul reprezentat în automatul $\tilde{A}$ prin starea $\{\emptyset\}$. Dacă $p \in E_2(A)$ atunci $\tau(p) = \{\emptyset\}$ și deci $\tilde{f}(\tau(e), p) = \tau(p) = \{\emptyset\}$, adică $E_2(A) \subseteq E$.

Reciproc, dacă $p \in E$ atunci $\tilde{f}(\tau(e), p) = \{\emptyset\} = \tau(p)$ și conform teoremei II.16.7, $p \in E_2(A)$, deci $E \subseteq E_2(A)$. ■

Observația II.16.9. Pentru automate $\{I, S\}$-finite mulțimea $\tilde{S}$ se poate construi într-un număr finit de pași și problema existenței unui experiment de specia a doua este decidabilă, în baza teoremei II.13.15.

Observația II.16.10. Pentru automate $\{I, S\}$-finite $E_2(A) \subseteq \mathcal{R}(I)$.

PARTEA a III-a

PROBLEME SPECIALE DE TEORIA AUTOMATELOR

§ III.0. INTRODUCERE

Această parte este consacrată unor probleme speciale din teoria structurală a automatelor. Se expun cele două puncte de vedere mai importante: teoria de structură a lui Krohn și Rhodes și studiul laticial al structurii automatelor inițiat de Hartmanis și Stearns.

Aceste dezvoltări sînt importante pentru proiectanții de sisteme cibernetice care vor găsi aici descrierea matematică a unor noțiuni uzuale astăzi în tehnică: noțiunea de simulare, noțiunea de rețea abstractă de automate etc.

§ III.1. SIMULAREA AUTOMATELOR DETERMINISTE FINITE CU AJUTORUL REȚELELOR MODULARE

În cele ce urmează vom nota cu I_k un alfabet cu k simboli.

Definiția II.1.1. Un *k-modul* este o aplicație h: $(I_k)^{n(h)} \to I_k$, unde $n(h) \in N^*$ reprezintă numărul bornelor de intrare.

Aplicația β_h^j: $(I_k)^{n(h)} \to I_k$ dată prin $\beta_h^j(i_1, i_2, \ldots, i_{n(h)}) = i_j$ *este borna a j-a de intrare* a k-modulului h, $j = \overline{1, n(h)}$, iar aplicația δ_h: $h((I_k)^{n(h)}) \to I_k$ dată prin $\delta_h = 1_{h|(I_k)^{n(h)}}$ este *borna de ieșire* a modulului h.

Observația III.1.1. Un k-modul este conceput ca un *dispozitiv* avînd $n(h)$ borne de intrare și o bornă de ieșire, care funcționează astfel. Dacă în momentul t se aplică la bornele de intrare simbolurile $i_1, i_2, \ldots, i_n$ atunci la momentul $t + 1$ la borna de ieșire apare semnalul $h(i_1, i_2, \ldots, i_n) \in I_k$, (vezi fig. III.1.1).

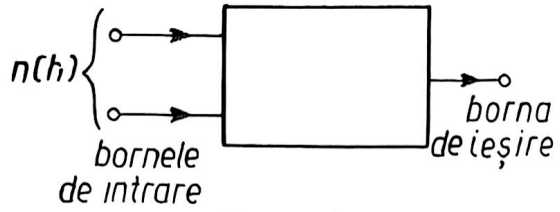


Fig. III.1.1

Observația III.1.2. Un k-modul poate fi interpretat ca un automat $A = [(I_k)^{n(h)}, \{s\}, I_k, f, g]$ a cărui ieșire suferă o întîrziere de un tact, iar $f(s, (i_1, \ldots, i_{n(h)})) = s$ și $g(s, (i_1, \ldots, i_{n(h)})) = h(i_1, \ldots, i_{n(h)})$.

În descrierea noțiunilor introduse apar funcții a căror valoare depinde de momentul t. Pentru simplitate vom nota cu ${}^tF$ valoarea unei astfel de funcții F la momentul t.

Vom indica un procedeu de construire a rețelelor de k-module.

Fie $\{h_1, h_2, \ldots, h_m\}$ o mulțime de k-module, $B = \{\beta^1_{h_1}, \ldots, \beta^{n(h_m)}_{h_m}\}$ mulțimea bornelor de intrare și $D = \{\delta_{h_1}, \ldots, \delta_{h_m}\}$ mulțimea bornelor de ieșire.

Definiția III.1.2. O *rețea de k-module*, pe scurt, o *rețea modulară* este un cuadruplu $\mathcal{R} = (B_1, \theta, z, D_1)$ unde $B_1 \subseteq B$, θ este o relație de echivalență pe $B \setminus B_1$, z: $(B \setminus B_1)/\theta \to D$ este o injecție, iar $D_1 \subseteq D$.

Observația III.1.3. Mulțimea B_1 va fi interpretată ca mulțimea bornelor de intrare ale rețelei $\mathcal{R}$. Bornele care aparțin aceleiași clase de echivalență sînt „conectate" la borna de ieșire care corespunde prin aplicația z acestei clase, iar submulțimea de borne de ieșire D_1 va fi concepută ca mulțimea bornelor de ieșire ale lui $\mathcal{R}$.

Observația III.1.4. O rețea $\mathcal{R}$ de k-module poate fi interpretată ca un automat finit $A_{\mathcal{R}} = [(I_k)^{|B_1|}, (I_k)^m, (I_k)^{|D_1|}, f_{\mathcal{R}}, g_{\mathcal{R}}]$. Aici

$$f_{\mathcal{R}}((i_1(t), \ldots, i_m(t)), (i'_1(t), \ldots, i'_{|B_1|}(t)) = (i_1(t+1), i_2(t+1), \ldots, i_m(t+1)),$$

unde prin $i_l(t)$ am notat simbolul furnizat la borna de ieșire a modulului h_l, $l = \overline{1, m}$ la momentul t, iar cu $i'_j(t)$ am notat simbolul aplicat la borna a j-a de intrare a rețelei la momentul t. Avem:

$$i_l(t+1) = h_l({}^t(z([\beta^1_{h_l}]_\theta)), \ldots, {}^t(z([\beta^{n(h_l)}_{h_l}]_\theta))).$$

Apoi

$$g_{\mathcal{R}}((i_1(t), \ldots, i_m(t)), (i'_1(t), \ldots, i'_{|B_1|}(t)) = (i''_{j_1}(t+1), \ldots, i''_{|D_1|}(t+1)),$$

unde

$$i''_l(t+1) = h_l({}^tz([\beta^1_{h_l}]_\theta), \ldots, {}^tz([\beta^{n(h_l)}_{h_l}]_\theta)),$$

iar

$$l \in \{j_1, j_2, \ldots, j_{|D_1|}\}.$$

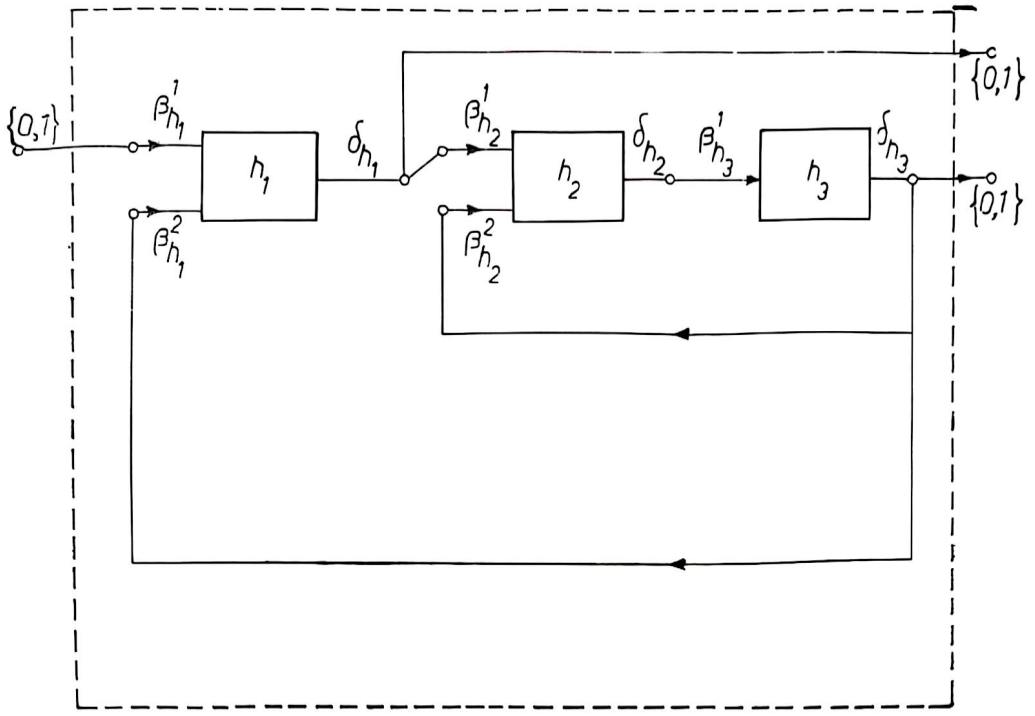


Fig. III.1.2

Exemplul III.1.1. Să considerăm rețeaua de 2-module din fig. III.1.2. Pentru această rețea

$$I_2 = \{0, 1\}, \quad B_1 = \{\beta^1_{h_1}\}, \quad D_1 = \{\delta_{h_1}\},$$
$$(B \setminus B_1)/\theta = \{\{\beta^2_{h_1}, \beta^2_{h_2}\}, \{\beta^1_{h_2}\}, \{\beta^1_{h_3}\}\},$$

iar z este prezentat în tabloul de mai jos

z	$\{\beta^2_{h_1}, \beta^2_{h_2}\}$	$\{\beta^1_{h_2}\}$	$\{\beta^1_{h_3}\}$
	δ_{h_3}	δ_{h_1}	δ_{h_2}

Funcțiile h_1, h_2, h_3, se obțin din tabelul următor:

h_1	(0, 0)	(0, 1)	(1, 0)	(1, 1)	h_2	(0, 0)	(0, 1)	(1, 0)	(1, 1)	h_3	0	1
	0	0	0	1		1	1	1	0		1	0

Automatul $A_{\mathcal{R}}$ atașat rețelei, $A_{\mathcal{R}} = [I_2, (I_2)^3, (I_2)^2, f_{\mathcal{R}}, g_{\mathcal{R}}]$ este descris în mod obișnuit prin tabele.

		(0, 0, 0)	(0, 0, 1)	(0, 1, 0)	(0, 1, 1)	(1, 0, 0)	(1, 0, 1)	(1, 1, 0)	(1, 1, 1)
$f_{\mathcal{R}}$	0	(0, 1, 1)	(0, 1, 1)	(0, 1, 0)	(0, 1, 0)	(0, 1, 1)	(0, 0, 1)	(0, 1, 0)	(0, 0, 0)
	1	(0, 1, 1)	(1, 1, 1)	(0, 1, 0)	(1, 1, 0)	(0, 1, 1)	(1, 0, 1)	(0, 1, 0)	(1, 0, 0)
$g_{\mathcal{R}}$	0	(0, 1)	(0, 1)	(0, 0)	(0, 0)	(0, 1)	(0, 1)	(0, 0)	(0, 0)
	1	(0, 1)	(1, 1)	(0, 0)	(1, 0)	(0, 1)	(1, 1)	(0, 0)	(1, 0)

Observația III.1.5. Deoarece oricărei rețele modulare i se poate atașa un automat ne punem problema simulării unui automat prin rețele modulare (vezi definiția II.7.2) în sensul simulării automatului dat de către automatul atașat rețelei construit în observația II.1.4. Pentru aplicațiile cu caracter tehnic interesează simularea automatelor finite.

Pentru prima dată problema a fost formulată de McCulloch și Pitts în anul 1943, în legătură cu modelarea rețelelor neurale [1] și reluată de Arbib [1, 3] precum și de numeroși alți autori.

Rezolvarea problemei este cuprinsă în:

Teorema III.1.1. *Pentru orice automat finit A există o rețea modulară $\mathcal{R}_A$ care simulează pe A.*

Demonstrație. Fie $A = [I, S, O, f, g]$ cu $I = \{i_1, \ldots, i_n\}$, $S = \{s_1, \ldots, s_l\}$, $O = \{o_1, \ldots, o_m\}$.

Rețeaua modulară $\mathcal{R}_A$ pe care o vom construi efectiv va conține un număr de lm 2-module cu $I_2 = \{0, 1\}$. Fiecărei perechi de numere $(j_1, j_2) \in \{1, \ldots, l\} \times \{1, \ldots, m\}$ îi vom atașa un 2-modul $h_{(j_1, j_2)}$ cu $n(h_{(j_1, j_2)}) = lm + n$ a cărui funcție va fi specificată ulterior (v. figura III.1.3).

Pentru rețeaua $\mathcal{R}_A = (B_1, \theta, z, D_1)$ avem $|B_1| = n$, $|D_1| = lm$,

$$(B \setminus B_1)/\theta = \{\{\beta^{(a,b)}_{h_{(1,1)}}, \ldots, \beta^{(a,b)}_{h_{(l,m)}}\} \mid a = \overline{1, l}, \quad b = \overline{1, m}\}$$

și

$$z(\{\beta^{(a,b)}_{h_{(1,1)}}, \ldots, \beta^{(a,b)}_{h_{(l,m)}}\}) = \delta_{h_{(a,b)}}.$$

Fie

$$\mathbf{w} = (\delta_{h_{(1,1)}}, \ldots, \delta_{h_{(l,m)}}) \quad \text{și} \quad \mathbf{z} = (\beta^1, \ldots, \beta^m),$$

iar

$$\text{(III.1.1)} \quad h_{(j_1, j_2)}({}^t\mathbf{w}, {}^t\mathbf{z}) = \begin{cases} 1, \text{ dacă } s_{j_1} = f(s_w, i_z) \text{ și } o_{j_2} = g(s_w, i_z) \\ 0, \text{ în caz contrar} \end{cases}$$

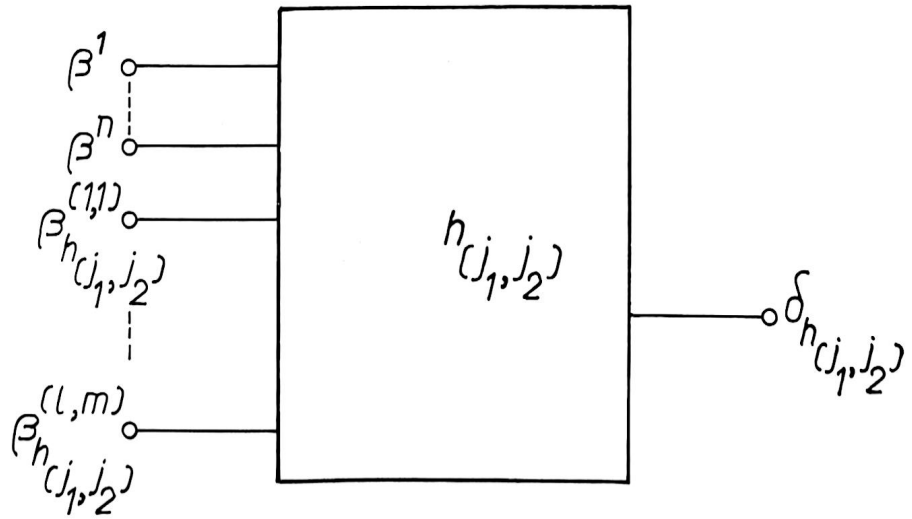


Fig. III.1.3

Definim s_w și i_z prin:

$$s_w = \begin{cases} s_{j_1'} \text{ cu } j_1' + j_2'' = \min\{j_1 + j_2 \mid {}^t\delta_{h(j_1, j_2)} = 1\} \\ s, \text{ dacă } {}^t\delta_{h(j_1, j_2)} = 0, \quad \forall (j_1, j_2) \end{cases}$$

$$i_z = \begin{cases} i_j \text{ cu } j = \min\{j_1 \mid {}^t\beta^{j_1} = 1\} \\ i_1, \text{ dacă } {}^t\beta_{j_1} = 0, \quad \forall j_1. \end{cases}$$

Automatul $A_{\mathcal{R}_A}$ construit în observația III.1.4 simulează automatul A. Într-adevăr, tripletul $\Psi = (t, u, w)$ unde aplicațiile

$$t: I \to I_2^n, \quad u: S \to I_2^{lm}, \quad w: I_2^{lm} \to O$$

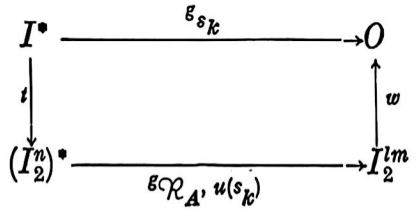
sînt date de

$$t(i_j) = \chi_{\{j\}} \in B_2^n, \quad u(s_j) = \chi_{\{h(j,j)\}} \in B_2^{lm}$$

și

$$w(\mathrm{w}) = \begin{cases} o_{j_2} \text{ unde } j_2 \text{ este ales astfel ca } j_1 + j_2 = \min\{j_1' + j_2' \mid \delta_{h(j_1', j_2')} = 1\} \\ o_1, \text{ dacă } \delta_{h(j_1', j_2')} = 0, \quad \forall (j_1', j_2'), \end{cases}$$

face comutativă diagrama



Este suficient să arătăm că $g(s_k, i_j) = w(g_{\mathcal{R}_A}(u(s_k), t(i_j)))$. Dar $g_{\mathcal{R}_A}(\chi_{\{h_{(k,1)}\}}, \chi_{\{i_j\}})$ poate fi calculat ținînd seama că la momentul t, la bornele de intrare ale unui modul oarecare $h_{(j_1, j_2)}$ situația se prezintă ca în fig. (III.1.4) iar ieșirea acestui modul se calculează cu

$${}^{t+1}\delta_{h(j_1, j_2)} = h_{(j_1, j_2)}((0 \ldots 1 \ldots 0), (0 \ldots 1 \ldots 0)) =$$

$$= \begin{cases} 1, \text{ dacă } s_{j_1} = f(s_k, i_j) \text{ și } o_{j_2} = g(s_k, i_j) \\ 0, \text{ în caz contrar,} \end{cases}$$

unde am ținut seama de formula (III.1.1).

Remarcăm că la momentul $t+1$ numai ieșirea modulului $h_{(j_1, j_2)}$ este egală cu 1. Prin urmare $w(g_{\mathcal{R}_A}(\chi_{\{h_{(k,1)}\}}, \chi_{\{i_j\}}) = o_{j_2} g(s_k, i_j)$. ■

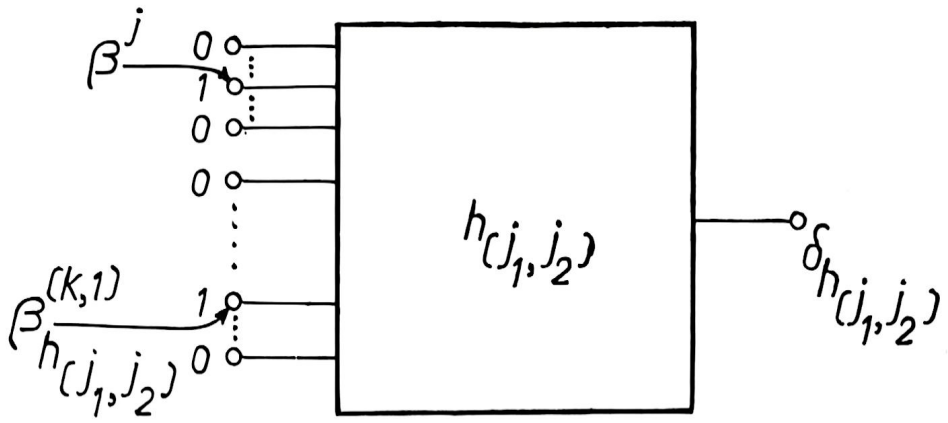


Fig. III.1.4

Observația III.1.6. Deoarece oricare ar fi modulul $h_{(j_1, j_2)}$ el are o bornă de intrare legată la ieșirea oricărui alt modul, rezultă că rețeaua $\mathcal{R}_A$ conține „bucle".

Pentru realizările concrete ale rețelelor prezența „buclelor" poate împiedeca funcționarea corectă. Vom prezenta de aceea posibilitatea de a simula automatele oarecare prin automate simple de tipuri fixate, prin cuplarea acestora în rețele fără bucle, automate care vor fi numite în continuare *componente de bază.*

§ III. 2. COMPONENTE DE BAZĂ ALE AUTOMATELOR FINITE

Vom studia în continuare unele automate simple din care se pot „construi" automate finite oarecare.

Definiția III.2.1. *Un automat cu identitate și dirijare* este un 5-uplu $A = [\{i_0, i_1, ..., i_n\}, \{s_1, s_2, ..., s_n\}, \{s_1, s_2, ..., s_n\}, f, g]$, unde $f(s, i_0) = g(s, i_0) = s$, $\forall s \in \{s_1, s_2, ..., s_n\}$ și $f(s, i_j) = g(s, i_j) = s_j$, pentru oricare stare s.

În cazul particular $n = 2$ obținem automatul cunoscut sub numele de *automat bistabil* sau pe scurt *bistabil,* care va juca un rol foarte important în cele ce urmează.

Legătura dintre automatele cu identitate și dirijare și bistabil este întregită de:

Teorema III.2.1. *Orice automat A cu identitate și dirijare având n stări poate fi simulat de un automat obținut prin legarea în cascadă a unei mulțimi de bistabili.*

Demonstrație. Fie m cel mai mic număr natural cu proprietatea $n \leqslant 2^m$. Să considerăm automatul

$$A_1 = [I_1, S_1, S_1, f_1, g_1],$$

unde

$$I_1 = \prod_{h=1}^{m} \{i_0^h, i_1^h, i_2^h\}, \quad S_1 = \prod_{h=1}^{m} \{s_1^h, s_2^h\}, \quad f_1((s_{r_1}^1, \ldots, s_{r_m}^m), (i_{j_1}^1, \ldots, i_{j_m}^m)) =$$

$$= g_1((s_{r_1}^1, \ldots, s_{r_m}^m), (i_{j_1}^1, \ldots, i_{j_m}^m)) = (f(s_r^1, i_j^1), \ldots, f(s_r^m, i_{j_m}^m)),$$

din fig. III.2.1. alcătuit din legarea în paralel (care este un caz particular al legării în cascadă, vezi observația II.8.2) a m bistabili. Vom nota cu ${}^2k$ scrierea cu m cifre, în baza 2, a numărului natural k, $0 \leqslant k \leqslant 2^m - 1$, ${}^2k = (j_1, j_2, \ldots, j_m)$.

Definim aplicațiile:

$$u: \{s_1, \ldots, s_n\} \to \prod_{h=1}^{m} \{s_1^h, s_2^h\},$$

prin

$$u(s_k) = (s_{2-j_1}^1, s_{2-j_2}^2, \ldots, s_{2-j_m}^m), \quad t: I \to \prod_{h=1}^{m} \{i_0^h, i_1^h, i_2^h\},$$

unde

$$t(i_0) = (i_0^1, i_0^2, \ldots, i_0^m) \quad \text{și} \quad t(i_k) = (i_{2-j_1}^1, i_{2-j_2}^2, \ldots, i_{2-j_m}^m)$$

și în fine

$$y: \prod_{h=1}^{m} \{s_1^h, s_2^h\} \to \{s_1, \ldots, s_m\} \quad \text{prin} \quad y(s_{r_1}^1, s_{r_2}^2, \ldots, s_{r_m}^m) = s_r,$$

unde ${}^2r = (2 - r_1, 2 - r_2, \ldots, 2 - r_m)$.

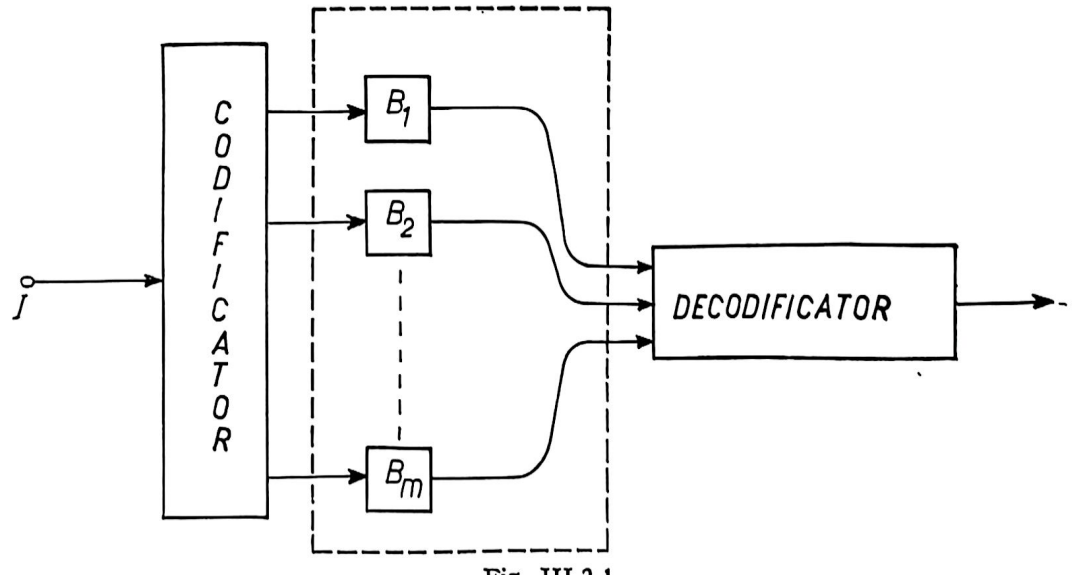
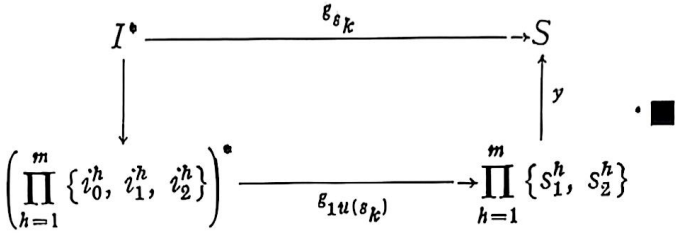


Fig. III.2.1

Tripletul $\Psi = (t, u, y)$ constituie o simulare a automatului A prin automatul obținut prin legarea în paralel. Se verifică că acest triplet face comutativă diagrama:



■

Fie $B = [\{i_0, i_1, i_2\}, \{s_1, s_2\}, \{s_1, s_2\}; f, g]$ un bistabil.

Teorema III.2.2. *Avem* $W(B; s_1) \cong W(B; s_2) \cong U_3$.

Demonstrație. Să observăm că

$$I^*/\mu^{g_{s_1}} = \{[i_0], [i_1], [i_2]\},$$

unde

$$[i_0] = \{i_0\}^*, \quad [i_1] = I^* i_1 \{i_0\}^*, \quad [i_2] = I^* i_2 \{i_0\}^*.$$

Mai întîi, este clar că dacă $p, q \in \{i_0\}^*$ atunci

$$g_{s_1} L_r L_p = g_{f(s_1, r)} L_p = g_{f(s_1, r)} L_q = g_{s_1} L_r L_q \quad \forall r \in I^*,$$

deci $(p, q) \in \mu^{g_{s_1}}$, adică $\{i_0\}^* \subseteq [i_0]$.

Apoi, dacă de exemplu $p, q \in I^* i_1 \{i_0\}^*$ atunci

$$p = p_1 i_1 i_0 \dots i_0 \quad \text{și} \quad q = q_1 i_1 i_0 \dots i_0$$

și avem

$$g_{s_1} L_r L_p = g_{s_1} L_{rp} = g_{f(s_1, rp)} = g_{s_1} = g_{f(s_1, rq)} = g_{s_1} L_r L_q$$

deci $(p, q) \in \mu^{g_{s_1}}$ și cum $i_1 \in I^* i_1 \{i_0\}^*$ avem $p, q \in [i_1]$.

Similar se arată că $I^* i_2 \{i_0\}^* \subseteq [i_2]$.

Incluziunile $[i_0] \subseteq \{i_0\}^*$, $[i_1] \subseteq I^* i_1 \{i_0\}^*$, $[i_2] \subseteq I^* i_2 \{i_0\}^*$ sînt evidente.

Așadar $I^*/\mu^{g_{s_1}} = \{[i_0], [i_1], [i_2]\}$ și avem următoarea tabelă de înmulțire

	$[i_0]$	$[i_1]$	$[i_2]$
$[i_0]$	$[i_0]$	$[i_1]$	$[i_2]$
$[i_1]$	$[i_1]$	$[i_1]$	$[i_2]$
$[i_2]$	$[i_2]$	$[i_1]$	$[i_2]$

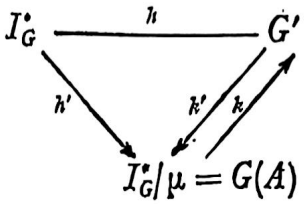
adică $W(B; s_1) = I^*/\mu^{g_{s_1}} \cong U_3$ deoarece $W(B; s_1)$ și U_3 au aceeași tabelă de înmulțire.

Analog se obține $W(B; s_2) \cong U_3$. ■

Definiția III.2.2. *Un automat cu permutare și dirijare* este un automat $A = [I, S, S, f, f]$ în care $\forall i$, aplicația $f_i: S \to S$ este fie o permutare a mulțimii S fie o aplicație constantă.

Observația III.2.1. Fie $I_G = \{i \mid i \in I,\ f_i \in P(S)\}$, unde $P(S)$ este grupul permutărilor mulțimii S. Atunci I_G^*/μ formează un grup. Într-adevăr, fie $G' \subseteq P(S)$ subgrupul generat de permutările $\{f_i \mid i \in I_G\}$ și aplicația h: $I_G \to G'$ dată prin $h(i) = f_i$, care se extinde la un homomorfism de semigrupuri $h: I^* \to G'$. Deoarece $\ker h = \mu = \ker h'$ avem semigrupurile izomorfe $G' \cong I_G^*/\mu$ așa cum rezultă din diagrama:

(III.2.1)



deci I_G^*/μ este un grup.

Definiția III.2.3. *Grupul automatului A cu permutare și dirijare* este grupul $G(A) = I_G^*/\mu \cong G'$.

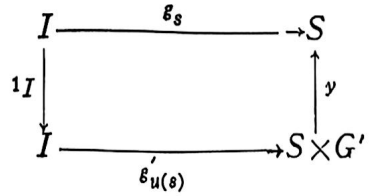
Remarcăm că automatele $A(G(A))$ și $A(G')$ sînt izomorfe și deci orice enunț valabil pentru unul din ele este valabil și pentru celălalt.

Teorema III.2.3. *Automatul $A = [I, S, O; f, g]$ cu permutare și dirijare poate fi simulat de cascada $A_1 \times_{(\xi,\eta)} A(G(A))$ în care ξ și η sînt aplicații convenabil alese, iar $A_1 = [I_1, S, S, f_1, g_1]$ este un automat cu identitate și dirijare, unde $I_1 = \{i_0, \{i_s\}_{s \in S}\}$ și $f_1(s, i_0) = g_1(s, i_0) = s$, $f(s_1, i_s) = g(s_1, i_s) = s$.*

Demonstrație. Vom arăta că automatul A poate fi simulat de cascada $A_1 \times_{(\xi,\eta)} A(G') = [I, S \times G', S \times G', f', g']$ (reprezentată în figura III.2.2 a), unde aplicațiile $\eta: I \to G'$ și $\xi: G' \times I \to I_1$ sînt date prin

$$\eta(i) = \begin{cases} f_i, & \text{dacă } i \in I_G \\ 1_S, & \text{dacă } i \in I \setminus I_G, \end{cases} \quad \text{și} \quad \xi(f_p, i) = \begin{cases} i_0, & \text{dacă } i \in I_G \\ i_{f_p^{-1}(s')}, & \text{dacă } i = i_{s'} \in I \setminus I_G. \end{cases}$$

Tripletul $\Psi = (1_I, u, y)$, $u: S \to S \times G'$, $y: S \times G' \to S$, unde $u(s) = (s, 1_S)$, $y(s, f_i) = f_i(s)$ face comutativă diagrama:



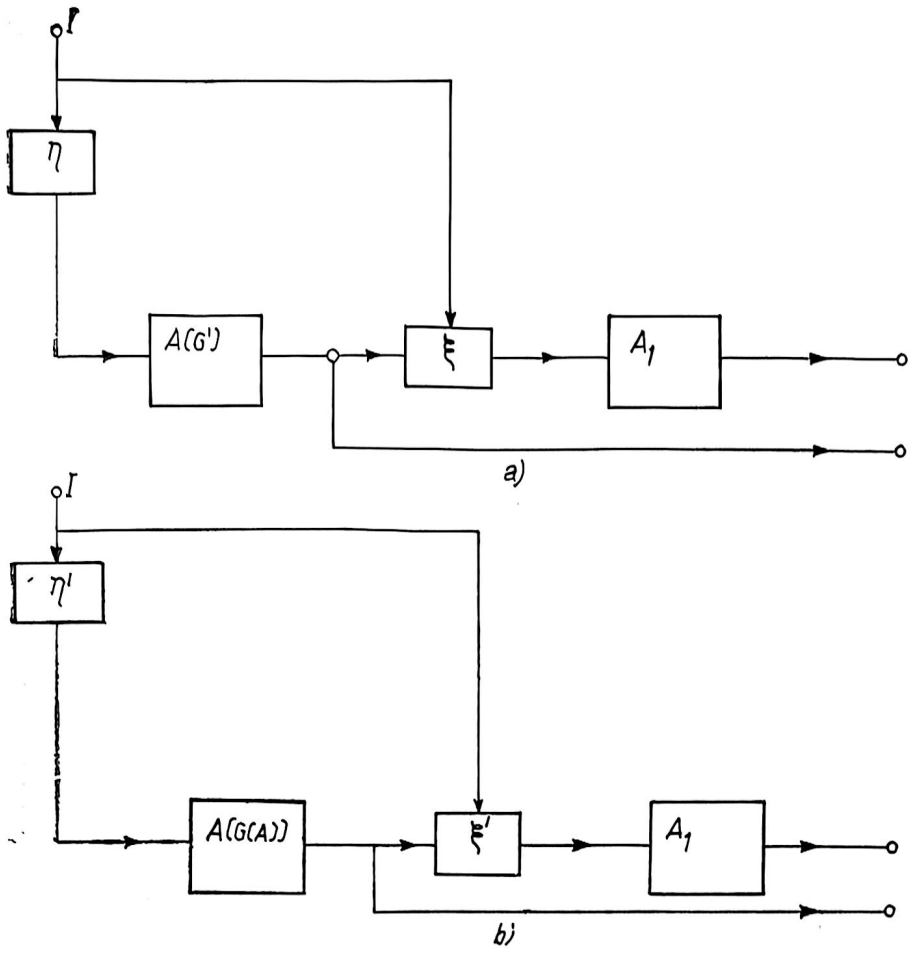


Fig. III.2.2

Într-adevăr,

$$y(g'_{u(s)}(i)) = y(g'((s, 1_s), i)) =$$

$$= \begin{cases} y(s, f_i), & \text{dacă } i \in I_G \\ y(f_1(s, i_{s'}), 1_S), & \text{dacă } i = i_{s'} \in I \setminus I_G \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} y(s, f_i), & \text{dacă } i \in I_G \\ y(s', 1_S), & \text{dacă } i = i_{s'} \in I \setminus I_G \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} f_i(s), & \text{dacă } i \in I_G \\ s', & \text{dacă } i = i_{s'} \in I \setminus I_G \end{cases} = g_s(i), \quad \text{deci} \quad y(g'_{u(s)}(i)) = g_s(i).$$

Fie acum $\eta' = k'\eta$, $\xi' : G(A) \times I \to I_1$ dat de $\xi'([p], i) = \xi(k([p]), i)$. Cascada $A_1 \times_{(\xi', \eta')} A(G(A))$ (v. fig. III.2.2b și diagrama (III.2.1)) simulează automatul A prin tripletul $\Psi' = (1_I, u', y')$ unde $u'(s) = (s, [e])$ și $y'(s, [p]) = y(s, k([p]))$, cum se constată imediat. ■

§ III. 3. TEOREMA LUI K. KROHN ŞI I.L. RHODES

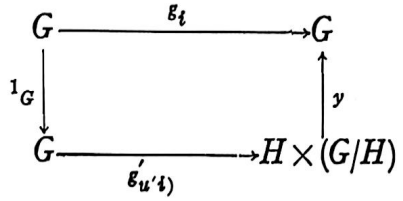
Rezultatul principal al acestui paragraf este teorema III.3.10, teorema de structură pentru automatele deterministe finite.

Teorema III.3.1. *Automatul $A(G)$ al unui grup finit G poate fi simulat printr-o cascadă de automate $A(G_{j-1}/G_j)$ unde $\{G_j\}_{j=\overline{0,m}}$ este un şir de compoziţie al grupului G şi $G_0 = G$.*

Demonstraţie. Este suficient să verificăm că dacă H este un divizor normal al lui G atunci automatul $A(G)$ poate fi simulat prin cascada $A(H) \times_{(\xi,\eta)} A(G/H)$ deoarece, dacă şirul $G = G_0 \supseteq G_1 \supseteq \ldots \supseteq G_m = \{e\}$ este un şir de compoziţie pentru grupul G atunci simulăm pe $A(G_{k-1})$ prin cascada lui $A(G_k)$ şi $A(G_k/G_{k-1})$, $A(G_{k-2})$ prin $A(G_{k-1})$ şi $A(G_{k-2}/G_{k-1})$ ş.a.m.d.

Fie aşadar $H \subseteq G$ şi grupul factor G/H. Definim aplicaţia α: $G/H \to G$ astfel: $\alpha([i]) \in [i]$.

Considerăm cascada $A(H) \times_{(\xi,\eta)} A(G/H)$ unde aplicaţiile η: $G \to G/H$ şi ξ: $(G/H) \times G \to H$ sînt date prin $\eta(i) = [i]$, $\xi([i_1], i) = \alpha([i_1])\, i(\alpha([i_1 i]))^{-1}$. Tripletul $\Psi = (1_G, u, y)$ unde aplicaţiile u: $G \to H \times (G/H)$, y: $H \times (G/H) \to G$ sînt date de $u(i) = (i(\alpha([i]))^{-1}, [i])$ *), $y(i, [i_1]) = i\alpha([i_1])$ face comutativă diagrama:



şi astfel constituie o simulare a automatului $A(G)$ prin automatul $A(H) \times_{(\xi,\eta)} A(G/H)$.

Într-adevăr,

$$y(g'_{u(i)}(i_1)) = y(g'(u(i), i_1)) =$$

$$= y(g'(i(\alpha([i]))^{-1}, [i]), i_1)) = y(i(\alpha([i]))^{-1} \alpha([i])\, i_1(\alpha(\alpha[i]\, i_1))^{-1}, [i]\,[i_1]) =$$

$$= ii_1(\alpha([ii_1]))^{-1} \alpha([ii_1]) = ii_1, \quad \text{iar} \quad g_i(i_1) = ii_1. \blacksquare$$

Teorema III.3.2. *Fie $W = \{w^1, w^2, \ldots, w^r, \ldots, w^{r+m-1}\}$ un semigrup ciclic finit de indice r şi perioadă m. Atunci $A(W)$ poate fi simulat de un automat obţinut prin legarea în cascadă a unor bistabili şi automate ale căror semigrupuri sînt grupuri simple care divid pe W.*

---

* Se observă imediat că $\forall i \in G$ avem $i(\alpha([i]))^{-1} \in H$, deoarece elementele i şi $\alpha([i])$ sînt conjugate după subgrupul H.

Demonstrație. Fie $W_1' = \{w_1, w_2, \ldots, w_r\}$ un semigrup pentru care

$$w_i w_j = \begin{cases} w_{i+j}, & \text{dacă } i+j \leqslant r \\ w_r, & \text{dacă } i+j > r, \end{cases}$$

și $G_1 = \{x^0, x^1, \ldots, x^{m-1}\}$ un grup ciclic generat de x.

Să introducem cîteva notații utile. Fie astfel:

$$\bar{k} = \begin{cases} k-l+m, & \text{dacă } r \leqslant k < l \\ k-l, & \text{dacă } l \leqslant k \leqslant r+m-1, \end{cases}$$

$$\hat{k} = \begin{cases} h+l, & \text{dacă } 0 \leqslant h \leqslant m-(l-r)-1 \\ h+l-m, & \text{dacă } m-(l-r) \leqslant h \leqslant m-1, \end{cases}$$

unde w^r este elementul idempotent al semigrupului W (a cărui existență este asigurată de teorema I.12.5).

Să verifică ușor că:

$$\hat{\bar{k}} = k \quad \text{și} \quad \bar{\hat{h}} = h.$$

Să considerăm grupul $G = \{w^r, w^{r+1}, \ldots, w^{r+m-1}\}$. Aplicația $\tau: G \to G_1$ definită prin $\tau(w^k) = x_{\bar{k}}$ constituie un izomorfism pentru care avem aplicația inversă $\tau^{-1} = \tau_1: G_1 \to G$ dată de $\tau_1(x_h) = w^{\hat{h}}$.

Fie aplicațiile $\eta: W \to W_1$ și $\xi: W_1 \times W \to G_1$ date de

$$\eta(w^k) = \begin{cases} w_k, & \text{pentru } k < r \\ w_r, & \text{pentru } k \geqslant r, \end{cases}$$

$$\xi(w_j, w^k) = \begin{cases} x_0, & \text{dacă } j+k \leqslant r \\ \tau(w^{j+k}), & \text{dacă } j+k > r \text{ și } j \leqslant r \\ \tau(w^k) & \text{dacă } j > r, \end{cases}$$

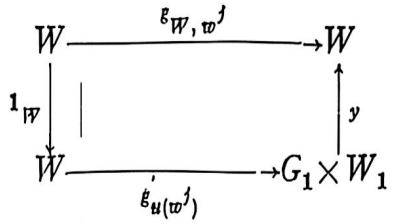
și cascada $A(G_1) \times_{(\xi,\eta)} A(W_1)$.

Tripletul $\Psi = (1_W, u, y)$ în care aplicațiile $u: W \to G_1 \times W_1$, $y: G_1 \times W_1 \to W$ sînt date de:

$$u(w^j) = \begin{cases} (x^0, w_j), & \text{dacă } j \leqslant r \\ (\tau(w^j), w_r), & \text{dacă } j > r, \end{cases} \qquad y((x_h, w_j)) := \begin{cases} w^j, & \text{dacă } j < r \\ \tau_1(x_h), & \text{dacă } j = r, \end{cases}$$

constituie simularea căutată.

Să verificăm că aplicațiile u și y fac comutativă diagrama



în care am notat cu g' funcția de ieșire a automatului $A(G_1) \times_{(\xi,\eta)} A(W_1)$.

Într-adevăr fie $w^k \in W$. Este clar că $g_{W,w^j}(w^k) = w^{j+k}$. Pe de altă parte, pentru a calcula $y(g'_{u(w^j)}(w^k)) = y(g'(u(w^j), w^k))$ vom distinge mai multe situații:

1) Dacă $j \leqslant r$, $k < r$ și $j + k \leqslant r$, avem $u(w^j) = (x^0, w_j)$, $\eta(w^k) = w_k$, $\xi(w_j, w^k) = x_0$ și $y(g'(u(w^j), w^k)) = y(g'((x_0, w_j), w^k)) = y((x_0, w_{j+k})) = w^{j+k}$.

2) Dacă $j \leqslant r$, $k < r$, dar $j + k > r$ avem $u(w^j) = (x^0, w_j)$, $\eta(w^k) = w_k$, $\xi(w_j, w^k) = \tau(w^{j+k})$, de unde $y(g'((x_0, w_j), w^k)) = y((\tau(w^{j+k}), w_r)) = \tau_1(\tau(w^{j+k})) = w^{j+k}$.

3) În cazul $j > r$, $k < r$, avem $j + k \geqslant r$ și deci $u(w^j) = (\tau(w^j), w_r)$, $\eta(w^k) = w_k$, $\xi(w_r, w^k) = \tau(w^k)$. Ca atare putem scrie $y(g'(u(w^j), w^k)) = y(g'((\tau(w^j), w_r), w^k)) = y((\tau(w^k).\ \tau(w^j), w_r)) = y((\tau(w^{j+k}), w_r) = w^{j+k}$.

4) În fine, dacă $j > r$ și $k > r$ găsim $u(w^j) = (\tau(w^j), w_r)$ $\eta(w^k) = w_r$, $\xi(w_r, w^k) = \tau(w^k)$, de unde $y(g'(u(w^j), w^k)) = y((\tau(w^{k+j}), w_r)) = w^{k+j}$.

Conchidem astfel că diagrama de mai sus este comutativă.

Deoarece grupurile care-l divid pe G divid și semigrupul W (căci $G \mid W$), și observînd că putem aplica automatului $A(G)$ teorema III.3.1, rămîne să mai arătăm că automatul $A(W_1)$ poate fi simulat prin legarea în cascadă a unui număr de automate bistabile $B_1, B_2, \ldots, B_r$.

Fie S_h mulțimea stărilor bistabilului B_h și $(s^1, s^2, \ldots, s^m) \in \prod_{h=1}^{m} S_h$. Să notăm $|(s^1, \ldots, s^m)| = |\{k \mid s^k = s_1, k = \overline{1, m}\}|$, cu alte cuvinte $|(s^1, \ldots, s^m)|$ reprezintă numărul de bistabili din mulțimea $\{B_1, \ldots, B_m\}$ aflați în starea s_1 la un moment dat.

Vom simula automatul $A(W_1)$ utilizînd cascada din fig. III.3.1 în care $\eta(w_j) = i_2$, $\forall j \in \{1, \ldots, r\}$, iar $\xi_k : \prod_{h=1}^{k} S_h \times W \to \{i_0, i_1, i_2\}$ este dată de

$$\xi_h((s^1, s^2, \ldots, s^h), w_j) = \begin{cases} i_1, \text{ dacă } |(s^1, s^2, \ldots, s^h)| = 1 \text{ și } h = j + k - 1 \text{ unde } k \text{ este numărul bornei dispozitivului } \xi_h \text{ la care avem un semnal } s_1. \\ i_2, \text{ în caz contrar.} \end{cases}$$

Am presupus aici că ieșirea bistabilului B_h este legată de a h-a bornă de intrare a tuturor dispozitivelor ξ_{h+j}, oricare ar fi $j = \overline{1, r-h-1}$ și că în fiecare tact există un singur bistabil în starea s_1.

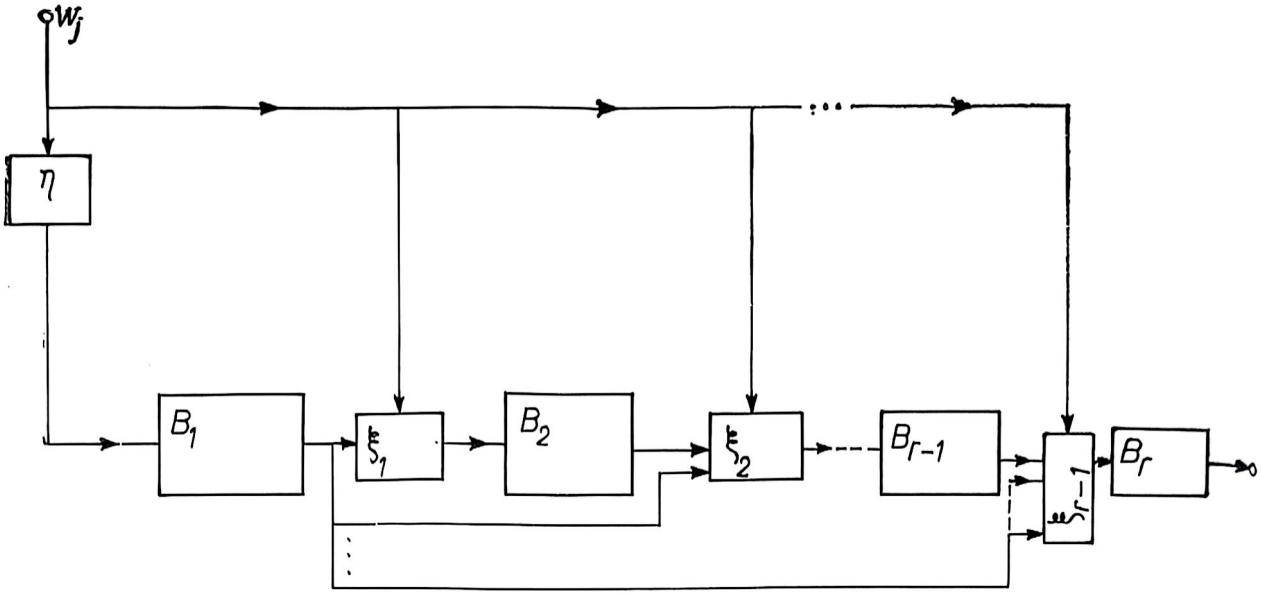


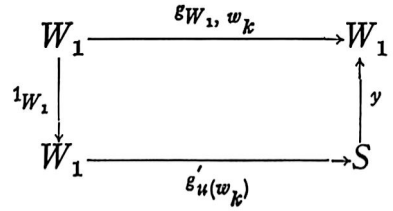
Fig. III.3.1

Funcționarea automatului din figura III.3.1 poate fi descrisă astfel: dacă la momentul t bistabilul B_k este în starea s_1 borna cu numărul k a tuturor dispozitivelor ξ_{k+1}, ξ_{k+2}, ..., ξ_{r-1} primește semnalul s_1. În această situație avem $|(s^1, s^2, ..., s^h)| = 1$ pentru $h = k+1, k+2, ..., r-1$ și să presupunem că la intrarea cascadei este introdus simbolul w_j. Atunci doar borna de ieșire a dispozitivului ξ_{j+k-1} emite semnalul i_1, toate celelalte borne emițînd semnalul i_2. Astfel, în tactul $t+1$ bistabilul B_{j+k} trece în starea s_1, toate celelalte trecînd în starea s_2.

Fie $S \subseteq \prod_{h=1}^{r} S_h$, unde $S = \{(s^1, s^2, ..., s^r) \,|\, |(s^1, s^2, ..., s^r)| \leqslant 1\}$, adică S este mulțimea r-uplelor care au cel mult o componentă egală cu s_1.

Fie $u: W_1 \to S$, $y: S \to W_1$, unde $u(w_k) = (s_2, ..., s_2, \underbrace{s_1, s_2, ..., s_2}_{k})$ și $y((s_2, ..., s_2, s_1)) = y((s_2, ..., s_2, s_2)) = w_r$, iar $y((\underbrace{s_2, ..., s_2, s_1}_{k}, s_2, ..., s_2)) = w_k$.

Tripletul $\Psi = (1_{W_1}, u, y)$ constituie o simulare a automatului $A(W_1)$ prin automatul din fig. III.3.1, deoarece diagrama



este comutativă, unde g' este funcția de ieșire a cascadei.

Într-adevăr, fie $w_j \in W_1$. Avem $y(g'_{u(w_k)}(w_j)) = y(g'(\underbrace{(s_2, s_2, \ldots, s_2}_{k}, s_1, s_2, \ldots, s_2), w_j)) = y(\underbrace{(s_2, \ldots, s_2}_{k+j}, s_1, \ldots, s_2)) = w_{k+j}$ în cazul în care $k + j = r$.

Dacă $k + r > r$, $y(g'_{u(w_k)}(w_j)) = y((s_2, \ldots, s_2)) = w_r$. ■

Teorema III.3.3. *Dacă W este un semigrup simplu la dreapta atunci automatul $A(W)$ poate fi simulat de un automat obținut prin legarea în cascadă a unor bistabili și automate ale căror semigrupuri sînt grupuri simple care divid pe W.*

Demonstrație. Conform teoremei I.12.6. $W \cong G \times W_0$, unde G este un grup și W_0 este un semigrup nul la dreapta. Dar, $A(W_0)$ este un automat cu identitate și dirijare și conform teoremei III.2.1, $A(W_0)$ poate fi simulat de o cascadă de bistabili.

Se constată că automatul $A(W)$ poate fi realizat prin legarea în paralel a automatelor $A(G)$ și $A(W_0)$ deoarece înmulțirea în semigrupuri $G \times W_0$ se face pe componente. Cum $G \mid W$, aplicînd automatului $A(G)$ teorema III.3.1 obținem rezultatul dorit. ■

Definiția III.3.1. Fie W un semigrup și $\{w_1, w_2, \ldots, w_m\} \subseteq W$. *Extensia semigrupului W prin elementele $\{w_1, \ldots, w_m\}$* este subsemigrupul $[W; w_1, \ldots, w_m]$ al semigrupului W^W generat de aplicațiile:

$$\{f \mid f: W \to W, \quad \exists w', f(w) = f_{w'}(w) = ww'\} \cup \{f_j \mid f_j: W \to W,$$

$$f_j(w) = w_j, \quad \forall w \in W, \quad j = \overline{1, m}\},$$

unde legea de compunere în W^W este dată de $(f_1 \circ f_2)(w) = f_2(f_1(w))$, deci $f_{w_1} \circ f_{w_2} = f_{w_1 w_2}$.

Definiția III.3.2. Fie $A(W) = [W, W, W, f_W, g_W]$ și $I = \{i_1, \ldots, i_m\}$ o mulțime de simboli. *Automatul extins* $A(W; I) = [I \cup W, W, W, \hat{f}, \hat{g}]$ este dat prin

$$\hat{f}(w, w_1) = \hat{g}(w, w_1) = \begin{cases} ww_1, & \text{dacă} \quad w, w_1 \in W \\ w_j, & \text{dacă} \quad w_1 = i_j, \quad \forall w \in W. \end{cases}$$

Legătura dintre automatul extins și automatul semigrupului extins este dată de:

Teorema III.3.4. *Are loc simularea $A(W; I) \mid A([W; w_1, \ldots, w_m])$.*

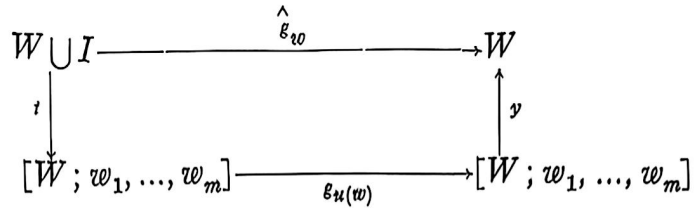
Demonstrație. Tripletul $\psi = (t, u, y)$, unde aplicațiile $t: W \cup I \to [W; w_1, \ldots, w_m]$, $u: W \to [W; w_1, \ldots, w_m]$, $y: [W; w_1, \ldots, w_m] \to W$ sînt definite prin:

$$t(w) = \begin{cases} f_w, & \text{dacă} \quad w \in W \\ f_j, & \text{dacă} \quad w = i_j \in I, \end{cases}$$

$u(w) = f_w$, $\forall w \in W$ și

$$y(f) = \begin{cases} w, & \text{dacă } f = f_w \\ w_j, & \text{dacă } f = f_j, \end{cases}$$

face comutativă diagrama:



deoarece, dacă

$$w' \in W \cup I, \quad y(g_{u(w)}(t(w'))) =$$

$$= \begin{cases} y(g_{u(w)}(f_{w'})), & \text{dacă } w' \in W \\ y(g_{u(w)}(f_j)), & \text{dacă } w' = i_j \in I \end{cases} = \begin{cases} y(f_w f_{w'}), & \text{dacă } w' \in W \\ y(f_w f_j), & \text{dacă } w' = i_j \in I \end{cases} =$$

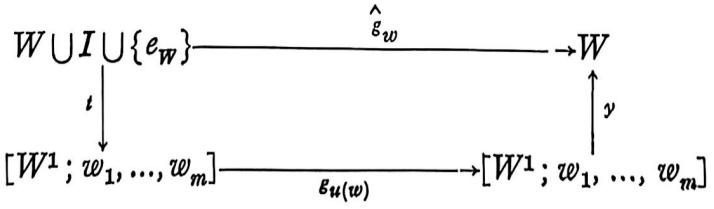
$$= \begin{cases} y(f_{ww'}), & \text{dacă } w' \in W \\ y(f_j), & \text{dacă } w' = i_j \in I \end{cases} = \begin{cases} ww', & \text{dacă } w' \in W \\ w_j, & \text{dacă } w' = i_j \in I \end{cases} = \hat{g}_w(w'). \blacksquare$$

Teorema III.3.5. *Are loc simularea:* $A(W; I \cup \{e_W\}) \mid A([W^1; w_1, ..., w_m])$ *unde* W^1 *este monoidul atașat semigrupului* W, *iar* e_W *este unitatea sa.*

Demonstrație. Automatul $A(W; I \cup \{e_W\}) = [I \cup \{e_W\} \cup W, W, W, \hat{f}, \hat{g}]$ unde

$$\hat{f}(w, w_1) = \hat{g}(w, w_1) = \begin{cases} ww_1, & \text{dacă } w, w_1 \in W \\ w_j, & \text{dacă } w = i_j, \quad \forall w \in W \\ w, & \text{dacă } w_1 = e_W, \quad \forall w \in W, \end{cases}$$

este simulat de automatul $A([W^1; w_1, ..., w_m])$ prin tripletul $\Psi = (t, u, y)$, care face comutativă diagrama:



Aici:

$$t(w) = \begin{cases} f_w, & \text{dacă } w \in W \\ f_j, & \text{dacă } w = i_j \in I \\ 1_w, & \text{dacă } w = e_W, \end{cases}$$

$$u(w) = f_w,$$

și

$$y(f) = \begin{cases} w, & \text{dacă } f = f_w \\ w_j, & \text{dacă } f = f_j \\ e_W & \text{dacă } f = 1_W. \end{cases}$$

Față de teorema precedentă rămîne încă de verificat că $y(g_{u(w)}(t(e_W))) = \hat{g}_w(e_W)$ (exercițiu!). ■

Teorema III.3.6. *Fie semigrupul $W = T \cup V$, unde T este un ideal propriu la dreapta, iar V este un subsemigrup propriu în W. Atunci $A(W)$ poate fi simulat de un automat obținut prin legarea în cascadă a unor bistabili și a unor automate ale căror semigrupuri divid niște semigrupuri obținute prin extensia* (în sensul definiției III.3.1) *a subsemigrupurilor T sau V.*

Demonstrație. Semigrupul W se încadrează în punctul al treilea al teoremei I.12.7. Vom distinge două cazuri, după cum $WT = W$ sau $WT \neq W$. Prima situație intră în cazul 3a) al teoremei I.12.7 iar a doua situație completează cazul 3a) și epuizează cazul 3b).

1. Fie $WT = W$. Automatul $A(W)$ poate fi simulat de cascada $A_2 \times {}_{\times(\xi,\eta)} A_1$, unde $A_1 = [I_1, T, T, f_1, g_1]$, $A_2 = [I_2, W, W, f_2, g_2]$, unde $I_1 = W \setminus T \cup \{i'_1, \ldots, i'_{|T|}\}$, $I_2 = T \cup \{i_0\}$ și

$$f_1(w, i_1) = g_1(w, i_1) = \begin{cases} w_j \in T, & \text{dacă } i_1 = i'_j \\ ww_1 \in T, & \text{dacă } i_1 = w_1 \in W \setminus T, \end{cases}$$

iar

$$f_2(w, i_2) = g_2(w, i_2) = \begin{cases} w, & \text{dacă } i_2 = i_0 \\ ww_2, & \text{dacă } i_2 = w_2 \in T, \end{cases}$$

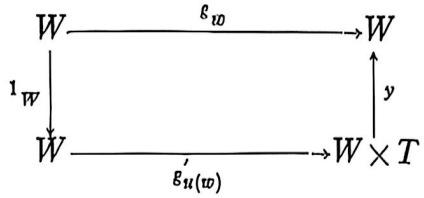
și aplicațiile $\eta: W \to I_1$, $\xi: T \times W \to I_2$ sînt date prin

$$\eta(w) = \begin{cases} i'_j, & \text{dacă } w = w_j \in T \\ w, & \text{dacă } w \in W \setminus T, \end{cases}$$

$$\xi(w', w) = \begin{cases} w' \in T, & \text{dacă } w \in T \\ i_0, & \text{dacă } w \in W \setminus T, \end{cases}$$

Tripletul $\Psi = (1_W, u, y)$, unde aplicațiile $u: W \to W \times T$, $y: W \times T \to W$ sînt date prin $u(w) = (w'', w') \in W \times T$ astfel ca $w = w''w'$ (ceea ce este

posibil deoarece în acest caz $W = W \cdot T$) iar $y(w'', w') = w''w'$, face comutativă diagrama:



unde g' este funcția de ieșire a cascadei.

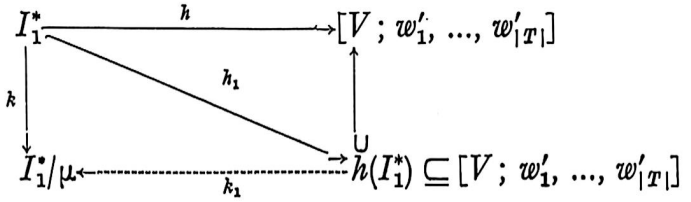
Într-adevăr, fie $w = w_j \in T$. Avem $\eta(w_j) = i'_j$ și $\xi(w', w_j) = w'$, de unde $g'((w'', w'), w_j) = y(w''w', w_j) = ww_j$, iar dacă $\hat{w} \in W \setminus T$ atunci $\eta(\hat{w}) = \hat{w}$ și $\xi(w', \hat{w}) = i_0$, ceea ce revine la $g'((w'', w'), \hat{w}) = y(w'', w'\hat{w}) = w''w'\hat{w} = w\hat{w}$.

Să observăm că $W(A_1, w') \mid [V; w'_1, w'_2, \ldots, w'_{|T|}]$, unde $[V, w'_1, \ldots, w'_{|T|}]$ este subsemigrupul semigrupului $[W; w'_1, \ldots, w'_{|W|}]$ generat de mulțimea de aplicații $\{f \mid f = f_v, v \in V\} \cup \{f_k \mid k = \overline{1, |T|}, f_k(w) = w'_k, \forall w \in W\}$, unde $T = \{w'_1, \ldots, w'_{|T|}\}$.

Aplicația h: $I_1 \to [V; w'_1, \ldots, w'_{|T|}]$, unde

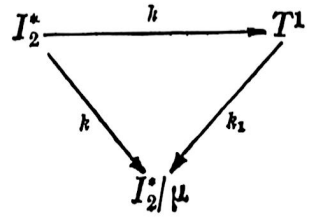
$$h(w) = \begin{cases} f_w, & \text{dacă } w \in W \setminus T \\ f_j, & \text{dacă } w = i_j, \end{cases}$$

se prelungește în mod natural la un homomorfism de semigrupuri h: $I^* \to [V; w'_1, \ldots, w'_{|T|}]$. Diagrama



se completează cu epimorfismul de semigrupuri k_1, deoarece $\ker h_1 \subseteq \ker k$. Deci $I_1^*/\mu = W(A_1; w') \mid [V; w'_1, \ldots, w'_{|T|}]$.

Să arătăm acum că $W(A_2; w'') \mid T^1$. Aplicația h: $I_2 \to T^1$ cu $h(i_0) = e_T$ (unde e_T este unitatea monoidului T^1) și $h(w) = w$, pentru $w \in T$ se prelungește la epimorfismul h: $I_2^* \to T^1$, iar diagrama



se completează cu epimorfismul k_1 deoarece $\ker h \subseteq \ker k$ și deci $I_2^*/\mu = W(A_2; w'') \mid T^1$.

În baza teoremei II.9.9 avem

$$A(W(A_1; w')) \mid A([V; w'_1, \ldots, w'_{|T|}]) \text{ și } A(W(A_2; w'')) \mid A(T^1),$$

de unde ținînd seama de teorema II.9.10 găsim

$$A_1 \mid A([V; w'_1, \ldots, w'_{|T|}]) \quad \text{și} \quad A_2 \mid A(T^1).$$

2) Fie $WT \neq W$. Dacă automatul $A(W)$ se află într-o stare din WT atunci, deoarece $WTW \subseteq WT$ în evoluția automatului apar numai stări din WT. Observînd că WT este un subsemigrup și că orice element $w \in WT$ se poate scrie sub forma $w = w_1 w_2$, unde $w_1 \in W$ și $w_2 \in T$ automatul $A(WT)$ poate fi simulat de aceeași cascadă ca și în cazul 1).

Să considerăm automatele $A(V^1)$, $A(WT)$, A cuplate ca în fig. III.3.2, unde automatul A este un bistabil.

Aici $\eta: W \to \{i_0, i_1, i_2\}$, $\xi: \{s_1, s_2\} \times W \to V^1 \times WT$ sînt aplicații definite de:

$$\eta(w) = \begin{cases} i_0, & \text{dacă } w \in V \setminus T \\ i_1, & \text{dacă } w \in T, \end{cases}$$

$$\xi(s, w) = \begin{cases} (e_V, w), & \text{dacă } w \in T, s \in \{s_1, s_2\} \\ (w, e_T), & \text{dacă } w \in V \setminus T \text{ și } s = s_2 \\ (e_V, w), & \text{dacă } w \in V \setminus T \text{ și } s = s_1. \end{cases}$$

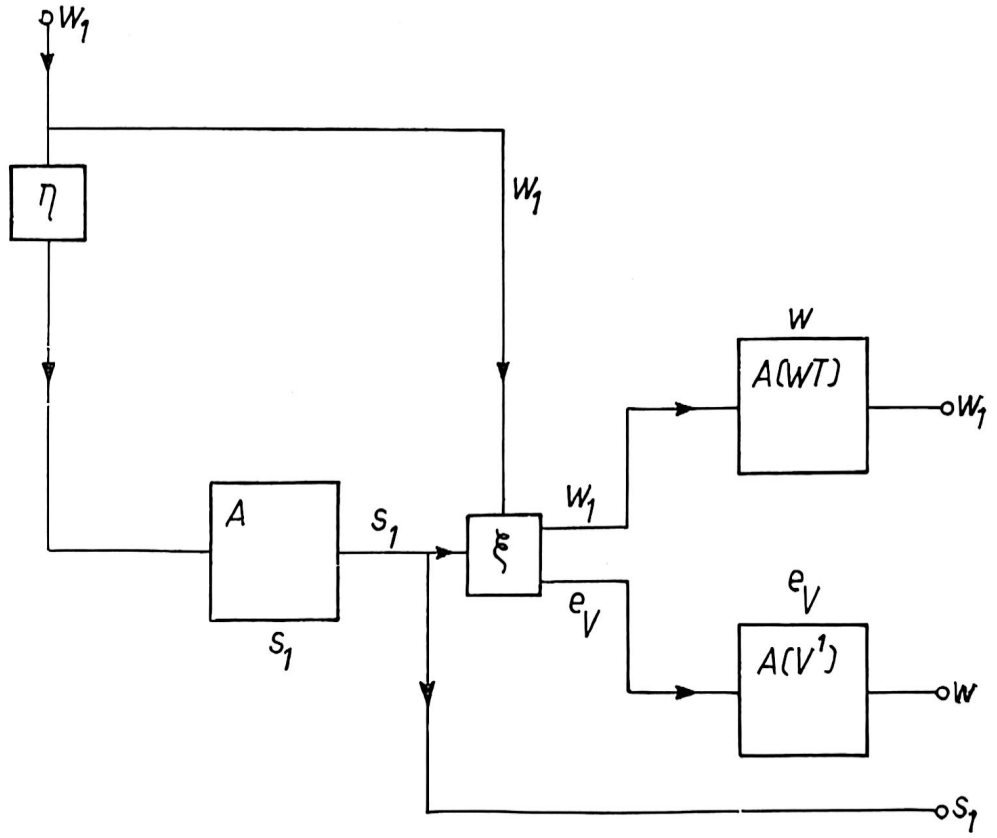


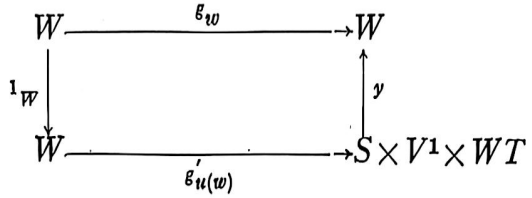
Fig. III.3.2

Tripletul $\Psi = (1_W, u, y)$, unde aplicațiile $u\colon W \to \{s_1, s_2\} \times V^1 \times WT$ și $y\colon \{s_1, s_2\} \times V^1 \times WT \to W$ sînt date prin

$$u(w) = \begin{cases} (s_2, w, e_T), & \text{dacă } w \in V \setminus T \\ (s_1, e_V, w), & \text{dacă } w \in T, \end{cases}$$

$$y(s, w_1, w_2) = w_1 w_2,$$

constituie o simulare a automatului $A(W)$ prin automatul din fig.III.3.2, deoarece diagrama



este comutativă.

Într-adevăr, fie $w_1 \in W$. Avem

$$y(g'_{u(w)}(w_1)) = \begin{cases} y(g'((s_2, w, e_T), w_1)), & \text{dacă } w \in V \\ y(g'((s_1, e_V, w), w_1)), & \text{dacă } w \in T \end{cases} =$$

$$= \left.\begin{cases} y(s_2, ww_1, e_T), & w_1 \in V \setminus T, w \in W \\ y(s_1, w, w_2), & w_1 \in T, \quad w \in V \\ y(s_1, e_V, ww_1), & w_1 \in V \setminus T, w \in T \\ y(s_1, e_V, ww_1), & w_1 \in T, \quad w \in T \end{cases} \right\} = ww_1 = g_w(w_1)$$

unde cu g' am notat funcția de răspuns a cascadei. ■

Teorema III.3.7. *Dacă automatul $A(W)$ este simulat de o cascadă formată din automatele unor grupuri și automate bistabile atunci și automatul semigrupului extins $A([W^1; w_1, \ldots, w_m])$ poate fi simulat de o cascadă alcătuită din automate bistabile și aceleași automate de grupuri. Aici $m = |W|$.*

Demonstrație. Să presupunem că automatul $A(W)$ este simulat prin $\Psi = (1_W, u, y)$ de cascada din figura III.3.3, alcătuită din automatele $A_j = [I_j, S_j, S_j, f^j, g^j]$, $j = \overline{1, n}$ care sînt automate de grupuri sau bistabili. În primul caz $I_j = S_j$, iar în al doilea caz $I_j = \{i_0, i_1, i_2\}$. Fie $A'_j = A(S_j; \{i^j_1, \ldots, i^j_{|S_j|}\})$ automatul extins. Acesta poate fi simulat, conform teoremei III.2.3, printr-o cascadă A''_j alcătuită din automatul A_j și

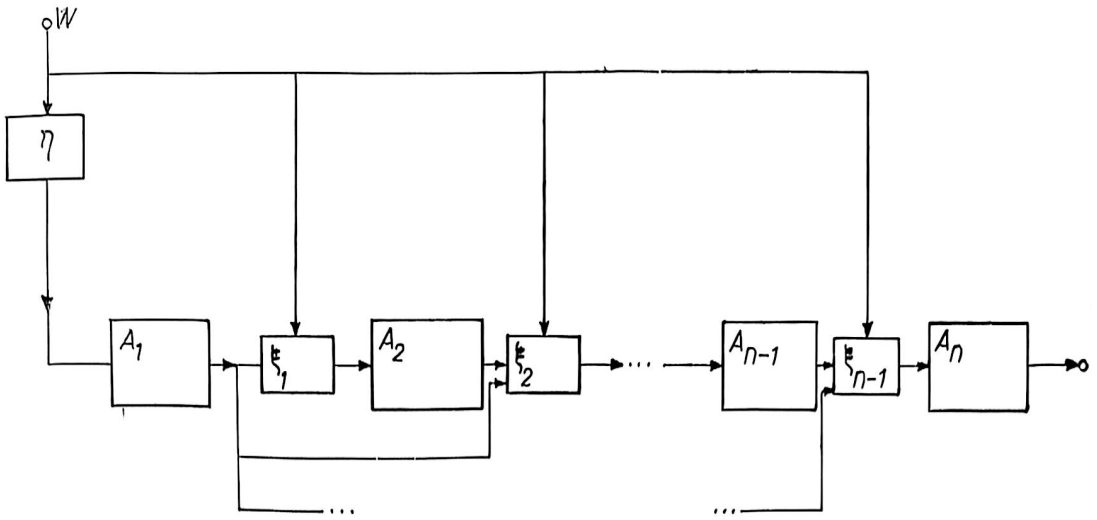


Fig. III.3.3

din automate bistabile. Fie $\Psi_j = (1_{I_j}, u_j, y_j)$ simularea, care face comutativă diagrama:

$$\begin{array}{ccc} S_j \cup X_j & \xrightarrow{g'_{j\beta}} & S_j \\ {\scriptstyle 1_{S_j \cup X_j}} \downarrow & & \uparrow {\scriptstyle y_j} \\ S''_j & \xrightarrow[g''_{ju_j(s)}]{} & S''_j \end{array}$$

Aici S''_j este mulțimea stărilor cascadei A''_j, iar $X_j = \{i_1^j, \ldots, i_{|S_j|}^j\}$ este mulțimea dirijărilor automatului A'_j.

Să considerăm cascada din fig. III.3.4 formată din automatele A''_j, bistabilii B, B' și bistabilii existenți deja în cascada din fig. III.3.3 pe care-i vom nota aici cu A''_k, legarea în cascadă a automatelor A''_j și A''_k fiind făcută în aceeași ordine ca în figura III.3.3.

Aplicațiile

$$\eta' : [W^1; w_1, w_2, \ldots, w_m] \to \{i_0, i_1, i_2\}^2 \times$$

$$\times \{e_W, w_1, \ldots, w_m\} \times [W^1; w_1, \ldots, w_m],$$

$$\xi_0 : [W^1; w_1, \ldots, w_m] \times X_1 \to I_1,$$

$$\xi'_j : [W^1; w_1, \ldots, w_m] \times S''_0 \times S''_1 \times \ldots \times S''_{j-1} \times$$

$$\times X_{j+1} \to I_{j+1}, \quad j = \overline{1, m-2}$$

și

$$H : \{e_W, w_1, \ldots, w_m\} \to \prod_{j=0}^{m-1} X_j$$

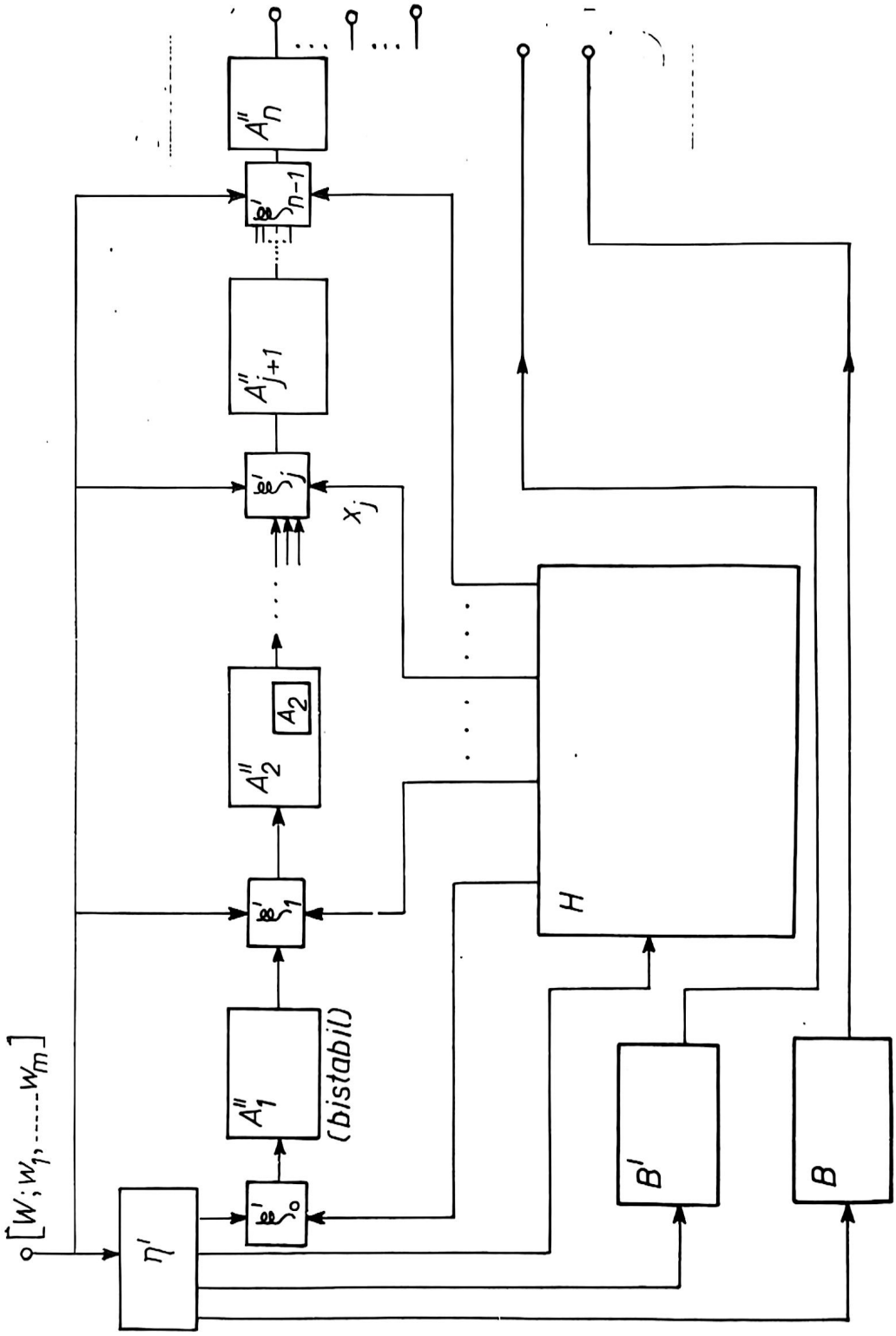

$[W; w_1, \ldots, w_m]$
η'
Σ'_0
A''_1
(bistabil)
Σ'_1
A''_2
A_2
Σ'_j
x_j
A''_{j+1}
Σ'_{n-1}
A''_n
H
B'
B

Fig. III.3.4

sînt date de:

$$\eta'(f) = \begin{cases} (i_0, i_1, e_W, f_{\eta(w)}), & \text{dacă } f = f_w \\ (i_0, i_2, w_j, 1_W), & \text{dacă } f = f_j \\ (i_0, i_0, e_W, 1_W), & \text{dacă } f = 1_W, \end{cases}$$

$$\xi'_0(f, x) = \begin{cases} \eta(w), & \text{dacă } f = f_w,\ x = x_0 \\ x_0, & \text{dacă } f = f_j \\ i_0, & \text{dacă } f = 1_W, \end{cases}$$

$$\xi'_j(f, s^0, s^1, \ldots, s^{j-1}, x_j) = \begin{cases} \xi_j(s^0, s^1, \ldots, s^{j-1}, w), & \text{dacă } f = f_w \\ x_j, & \text{dacă } f = f_k \\ i_0 \text{ sau } s_0^j, & \text{dacă } f = 1_W, \end{cases}$$

unde s_0^j este unitatea grupului S_{j+1} în cazul în care automatul A_{j+1} este un automat de grup și în fine

$$H(w) = \begin{cases} (i_0, s_0^2, \ldots, s_0^{m-1}), & \text{dacă } w = e_W \\ (x_1, x_2, \ldots, x_{m-1}), & \text{dacă } w = w_j. \end{cases}$$

În acest ultim caz x_k este dirijarea care duce automatul A''_{k+1} în starea $u_k(pr_k u(w_j))$, $k = \overline{1, m}$.

Tripletul $\Psi = (1_{[W^1; w_1, \ldots, w_m]}, U, Y)$ este o simulare a automatului $A([W^1; w_1, \ldots, w_m])$ prin automatul din fig. III.3.4.

Aplicațiile:

$$U(f) = \begin{cases} (s_1, s_1, u_1(pr_1 u(w)), \ldots, u_n(pr_n u(w))), & \text{dacă } f = f_w \\ (s_2, s_1, u_1(pr_1 u(w_j)), \ldots, u_n(pr_n u(w_j))), & \text{dacă } f = f_j \\ (s_1, s_1, u_1(i_0), u_2(s_0^2), \ldots, u_n(s_0^n)), & \text{dacă } f = 1_W, \end{cases}$$

și

$$Y(s_B, s_{B'}, s''_1, s''_2, \ldots, s''_n) = \begin{cases} f_w, \text{ dacă } s_B = s_{B'} = s_1 \text{ și} \\ s''_1 = u_1(pr_1 u(w)), \ldots, s''_n = u_n) pr_n u(w)) \\ f_j, \text{ dacă } (s_B = s_2) \text{ sau } (s_{B'} = s_2) \text{ și} \\ s''_1 = u_1(pr_1 u(w_j)), \ldots, s''_n = u_n(pr_n u(w_j)) \\ \text{arbitrar, în celelalte cazuri.} \end{cases}$$

fac comutativă diagrama:

$$\text{(III.3.1)}\qquad \begin{array}{ccc} [W^1; w_1, \ldots, w_m] & \xrightarrow{g_f} & [W^1; w_1, \ldots, w_w] \\ {\scriptstyle 1_{[W^1;\, w_1, \ldots, w_m]}}\downarrow & & \uparrow{\scriptstyle Y} \\ [W^1; w_1, \ldots, w_m] & \xrightarrow[\hat{g}_{U(f)}]{} & S_B \times S_{B'} \times \prod_{j=1}^{n} S_j'' \end{array}$$

Aici $\hat{g}$ este funcția de ieșire a cascadei din fig. III.3.4, iar S_j'' mulțimea stărilor automatului A_j''.

Într-adevăr, pe de o parte:

$$g_f(f') = \begin{cases} f_{ww'}, & f = f_w \text{ și } f' = f_{w'} \\ f_h, & \text{dacă } f = f_j,\ f' = f_{w'} \text{ și } w_j w' = w_h \\ f_k, & \text{dacă } f' = f_k,\ \forall f \\ f, & \text{dacă } f' = 1_W \\ f', & \text{dacă } f = 1_W, \end{cases}.$$

iar pe de altă parte

$$\hat{g}_{U(f)}(f') = \hat{g}(U(f), f') = \begin{cases} \hat{g}(s_1, s_1, u_1(pr_1 u(w)), \ldots, u_n(pr_n u(w)), f'), & \text{dacă } f = f_w \\ \hat{g}(s_2, s_1, u_1(pr_1 u(w_j), \ldots, u_n(pr_n u(w_j)), f'), & \text{dacă } f = f_j \\ \hat{g}(s_1, s_1, u_1(s_1), \ldots, u_n(s_0^n), f'), & \text{dacă } f = 1_W. \end{cases}$$

Vom analiza, pe rînd, cele trei situații de mai sus.

Avem:

$$\hat{g}(U(f_w), f') = \begin{cases} (s_1, s_1, u_1(pr_1 u(ww')), \ldots, u_n(pr_n u(ww'))), & \text{dacă } f' = f_w, \\ (s_1, s_2, u_1(pr_1 u(w_k)), \ldots, u_n(pr_n u(w_k)), & \text{dacă } f' = f_k \\ (s_1, s_1, u_1(pr_1 u(w)), \ldots, u_n(pr_n u(w))), & \text{dacă } f' = 1_W. \end{cases}$$

Apoi

$$\hat{g}(U(f_j), f') =$$

$$= \begin{cases} (s_2, s_1, u_1(pr_1 u(w_h)), \ldots, u_n(pr_n u(w_h))), & \text{dacă } w_j w = w_h \text{ și } f' = f_w \\ (s_2, s_2, u_1(pr_1 u(w_k)), \ldots, u_n(pr_n u(w_k))), & \text{dacă } f' = f_k \\ (s_2, s_1, u_1(pr_1 u(w_j)), \ldots, u_n(pr_n u(w_j))), & \text{dacă } f' = 1_W, \end{cases}$$

și, în fine

$$\hat{g}(U(1_W), f') = \begin{cases} (s_1, s_1, u_1(pr_1u(w')), \ldots, u_n(pr_nu(w'))), & \text{dacă } f' = f_{w'} \\ (s_1, s_2, u_1(pr_1u(w_k)), \ldots, u_n(pr_nu(w_k))), & \text{dacă } f' = f_k \\ (s_1, s_1, u_1(s_1), \ldots, u_n(s_0^n)), & \text{dacă } f' = 1_W. \end{cases}$$

Valorile lui $Y(\hat{g}_{U(f)}(f'))$ sînt date în tabelul de mai jos

f \ f'	$f_{w'}$	f_k	1_W
f_w	$f_{ww'}$	f_k	f_w
f_j	f_h	f_k	f_j
1_W	$f_{w'}$	f_k	1_W

ceea ce confirmă comutativitatea diagramei (III.3.1). ■

Observația III.3.1. Demonstrarea teoremei precedente nu se schimbă esențial dacă automatul A_1 din cascada din fig. III.3.4 nu ar fi un bistabil.

Observația III.3.2. Fie V un subsemigrup al lui W și $T = \{w'_1, \ldots, w'_{|T|}\}$ un ideal la dreapta în W. Dacă $A(V)$ este simulat de o cascadă formată de bistabili și automatele unor grupuri atunci și $A([V^1; w'_1, \ldots, w'_{|T|}])$ poate fi simulat de o cascadă alcătuită din bistabili și aceleași automate de grupuri.

Rezultatul se obține imediat examinînd tabelul de înmulțire al operatorilor subsemigrupului $[V^1; w'_1, \ldots, w'_{|T|}]$,

f \ f'	f	f'	1_W
f	f	f'_k	f
f'_j	f'_h	f'_k	f'_j
1_W	f	f'	1_W

unde $f'_j: W \to W$ este aplicația $f'(w) = w'_j \in T$ și $f'_j f_{v'} = f'_h$, cînd $w'_j v' = w'_h \in T$. ■

Teorema III.3.8. *Dacă W este un semigrup ciclic atunci $A([W^1; w_1, ..., w_m])$ $(m = |W|)$ poate fi simulat de o cascadă de bistabili și automatele unor grupuri simple care divid pe W.*

Demonstrație. Automatul $A(W)$ poate fi simulat, conform teoremei III.3.2 de un automat obținut prin legarea în cascadă a unor bistabili și automate ale căror semigrupuri sînt grupuri simple care divid pe W.

Pe de altă parte, conform teoremei III.3.7, automatul $A([W^1; w_1, ..., w_m])$ poate fi simulat prin legarea în cascadă a unor bistabili și a acelorași automate de grupuri simple. ■

Teorema III.3.9. *Dacă W este un semigrup simplu la dreapta atunci $A([W^1; w_1, ..., w_m])$ $(m = |W|)$ poate fi simulat de o cascadă de bistabili și de automatele unor grupuri simple care divid pe W.*

Demonstrație. Se procedează analog ca la teorema III.3.8, dar apelîndu-se la teorema III.3.3, în locul teoremei III.3.2.

Teorema III.3.10. *(teorema lui Krohn-Rhodes de structură a automatelor finite). Orice automat finit A poate fi simulat prin legarea în cascadă a unor bistabili și automate de grupuri simple care divid pe W, unde W este semigrupul automatului A.*

Demonstrație. Vom proceda prin inducție după numărul de elemente ale semigrupului W. Fie $P(W)$ proprietatea adevărată în cazul în care atît automatul $A(W)$ cît și automatul $A([W; w_1, ..., w_m])$ $(m = |W|)$ pot fi simulate prin cascada de bistabili și automate de grupuri simple care divid pe W. Evident $P(W)$ este adevărată dacă $|W| = 1$ (în baza teoremei III.2.1).

Să presupunem $P(W)$ adevărată pentru toate semigrupurile W cu $|W| \leqslant n$. Vom dovedi că $P(W)$ este valabilă și pentru cazul $|W| = n + 1$.

Dacă W este ciclic sau simplu la dreapta $P(W)$ este adevărată conform cu teoremele III.3.8 și III.3.9. În baza teoremei I.12.7 mai rămîne cazul cînd $W = T \cup V$, unde T este un ideal propriu la dreapta și V este un subsemigrup propriu, deci $|T| \leqslant n$, $|V| \leqslant n$.

Conform teoremei III.3.6 automatul $A(W)$ poate fi simulat de o cascadă alcătuită din bistabili și automatele $A(T^1)$ și $A([V; w'_1, ..., w'_{|T|}])$ și deoarece $P(T)$ și $P(V)$ sînt adevărate, utilizînd teorema III.3.7 și observația III.3.2, urmează că $A(W)$ poate fi simulat de o cascadă de bistabili și de automate de grupuri simple care divid pe T și V și deci pe W. Aplicînd teorema III.3.7 urmează că $P(W)$ este adevărată.

Deoarece $A \mid A(W(A; w))$, oricare ar fi w (vezi teorema II.9.10) urmează că teorema III.3.10 este adevărată. ■

Un rezultat care completează consecința II.9.4 se poate obține în baza teoremei precedente. Are loc:

Teorema III.3.11. *Un automat A este ireductibil dacă și numai dacă $W(A, s_0)$ este un grup simplu sau un semigrup din* **U**.

Demonstrație. Suficiența rezultă din consecința II.9.4. Să demonstrăm acum necesitatea. Fie A un automat ireductibil. Conform teoremei III.3.10, automatul A poate fi simulat de o cascadă alcătuită din bistabili și automatele unor grupuri simple $\{G_j\}$ care divid pe $W(A; s_0)$. Cum A este ireductibil rezultă că $A \mid A(W(B, s))$ sau $A \mid A(W(A(G_j); g))$. În primul caz, ținînd seama de teorema III.2.2 avem $A \mid A(U_3)$, de unde $W(A; s_0) \mid W(A(U_3)) \mid U_3$, adică $W(A; s_0) \in \mathbf{U}$.

În al doilea caz $A \mid A(W(A(G_j); g)) \mid A(G_j)$ (vezi consecința II.9.3), de unde $W(A; s_0) \mid W(A(G_j); g) \mid G_j$ și cum G_j este grup simplu urmează $W(A; s_0) = G_j$. ■

§ III. 4. CONGRUENȚE PE MULȚIMEA DE STĂRI A UNUI AUTOMAT DETERMINIST

Atașarea unei algebre unare unui automat permite aplicarea metodelor algebrei universale în teoria automatelor.

Definiția III.4.1. *Algebra unară atașată automatului* $A = [I, S, O, f, g]$ este perechea $U(A) = [S, \{f_i\}_{i \in I}]$ în care mulțimea stărilor automatului este mulțimea suport a algebrei, iar operațiile algebrei sînt definite de $f_i(s) = f(s, i)$.

Definiția III.4.2. O *congruență pe automatul* A este o echivalență $\sigma \in \mathrm{Eq}(S)$ cu proprietatea:

$$\forall (s_1, s_2) \in \sigma \rightarrow (f(s_1, i), f(s_2, i)) \in \sigma, \quad \forall i \in I. \tag{III.4.1}$$

Aceeași definiție este valabilă și pentru semiautomate.

Observația III.4.1. Dacă σ este o congruență pe automatul A și $(s_1, s_2) \in \sigma$ atunci $(f(s_1, p), f(s_2, p)) \in \sigma$, $\forall p \in I^*$.

Observația III.4.2. Relația de echivalență ρ între stările unui automat (vezi definiția II.5.1) este o relație de congruență cum rezultă din teorema II.5.1 (vezi și observația II.5.3).

Definiția III.4.3. *O congruență consistentă pe automatul* A este o congruență σ pe A cu proprietatea:

$$\forall (s_1, s_2) \in \sigma \rightarrow g(s_1, i) = g(s_2, i), \quad \forall i \in I.$$

Observația III.4.3. Dacă σ este o congruență consistentă atunci $\forall (s_1, s_2) \in \sigma$ avem $g(s_1, p) = g(s_2, p)$, $\forall p \in I^*$. Rezultă imediat din formula III.4.1.

Observația III.4.4. Relația de echivalență ρ între stările automatului A este o congruență consistentă.

Teorema III.4.1. *Relația* ρ *este cea mai mare congruență consistentă pe automatul* A.

Demonstrație. Fie σ o congruență consistentă pe automatul A. Dacă $(s_1, s_2) \in \sigma$, din observația III.4.3 rezultă $g(s_1, p) = g(s_2, p)$, $\forall p \in I^*$, deci $(s_1, s_2) \in \rho$, adică $\sigma \leqslant \rho$. ■

Definiția III.4.4. *Automatul atașat congruenței* σ pe automatul $A = [I, S, O, f, g]$ este automatul $A(\sigma) = [I, S/\sigma, S/\sigma, f_\sigma, f_\sigma]$ unde $f_\sigma([s], i) = [f(s, i)]$, $\forall [s] \in S/\sigma$, $i \in I$.

Definiția III.4.5. *Semiautomatul cît atașat congruenței* σ pe semiautomatul $A = [I, S, f]$ este semiautomatul $A/\sigma = [I, S/\sigma, f_\sigma]$ unde $f_\sigma([s], i) = [f(s, i)]$.

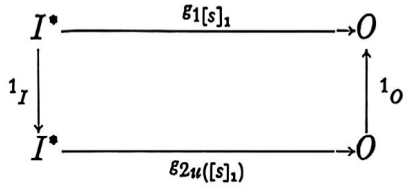
Definiția III.4.6. *Automatul cît atașat congruenței* consistente σ pe automatul A este automatul $A/\sigma = [I, S/\sigma, O, f_\sigma, g_\sigma]$, unde $f_\sigma([s], i) = [f(s, i)]$ și $g_\sigma([s], i) = g(s, i)$, $\forall [s] \in S/\sigma$, $i \in I$.

Lăsăm în seama cititorului verificarea bunei definiri a aplicațiilor f_σ și g_σ.

Observația III.4.5. Unei congruențe consistente i se pot atașa automatele $A(\sigma)$ și A/σ.

Teorema III.4.2. *Fie* σ_1 *și* σ_2 *două congruențe consistente pe automatul* A *și* $\sigma_1 \leqslant \sigma_2$. *Atunci* $A/\sigma_2 \mid A/\sigma_1$.

Demonstrație. Tripletul $\Psi = (1_I, u, 1_O)$ unde aplicația $u: S/\sigma_1 \to S/\sigma_2$ este dată de $u([s]_1) = [s]_2$ face comutativă diagrama:



deoarece pe de o parte $g_{1[s]_1}(p) = g(s, p)$, iar pe de altă parte $g_{2u([s]_1)}(p) = g_{2[s]_2}(p) = g(s, p)$. ■

Consecința III.4.1. Automatul cît A/ρ simulează automatul cît A/σ oricare ar fi σ o congruență consistentă pe automatul A.

Observația III.4.6. Aplicația $u: S/\sigma_1 \to S/\sigma_2$ este un homomorfism surjectiv de la algebra $U(A/\sigma_1)$ pe $U(A/\sigma_2)$, deoarece dacă $[s]_2 = u([s_1])$ avem $f_{2i}(u([s_1]) = f_{2i}([s_2]) = [f(s, i)]_2 = u([f(s, i)]_1) = (u(f_{1i}([s_1]))$, $\forall i \in I$.

Există întotdeauna un homomorfism surjectiv $u: U(A/\sigma) \to U(A/\rho)$ oricare ar fi congruența consistentă σ pe A.

Fie $U = [S, \{f_i\}_{i \in I}]$ o algebră unară.

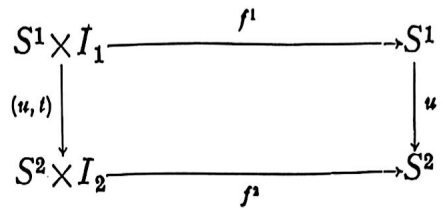
Definiția III.4.7. *Automatul atașat algebrei* U este automatul $A(U) = [I, S, S, f, f]$ unde $f(s, i) = f_i(s)$, $\forall i \in I$, $s \in S$.

Teorema III.4.3. Fie $\Omega = (\alpha, \beta)$ *un polimorfism de la algebra* $U_1 = [S^1, \{f_i^1\}_{i \in I_1}]$ *la algebra* $U_2 = [S^2, \{f_i^2\}_{i \in I_2}]$, *adică* α: $\{f_i^1\}_{i \in I_1} \to \{f_i^2\}_{i \in I_2}$ *este o bijecție și* β: $S^1 \to S^2$ *satisface egalitatea*

$$\beta(f_i^1(s^1)) = \alpha(f_i^1)\,(\beta(s^1)).$$

Atunci există un homomorfism $\chi = (t, u, u)$: $A(U_1) \to A(U_2)$.

Demonstrație. Aplicațiile t: $I_1 \to I_2$, u: $S^1 \to S^2$ unde $t(i_1) = i_2$ dacă $\alpha(f_{i_1}^1) = f_{i_2}^2$ și $u = \beta$ fac comutativă diagrama:



Într-adevăr, fie $(s^1, i_1) \in S^1 \times I_1$. Avem $f^2((u, t), ((s^1, i_1)) = f^2(u(s^1), t(i_1)) = f^2_{t(i_1)}(\beta(s^1)) = \alpha(f_{i_1}^1)\,(\beta(s^1)) = \beta(f_{i_1}^1(s^1)) = u(f_{i_1}^1(s^1))$. ■

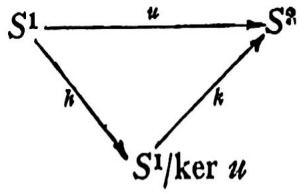
Teorema III.4.4. *Fie* $A_j = [I, S^j, f^j]$, $j = 1, 2$ *două semiautomate cu același alfabet de intrare și* $\chi = (1_I, u)$ *un homomorfism surjectiv* χ: $A_1 \to A_2$. *Relația* $\sigma \subseteq S^1 \times S^1$, $\sigma = \ker u$ *este o congruență pe semiautomatul* A_1 *și semiautomatul* A_2 *este izomorf cu semiautomatul cît* A_1/σ.

Demonstrație. Fie $(s', s'') \in \ker u = \sigma$. Atunci $u(s') = u(s'')$ și trebuie să arătăm că $\forall i \in I$, $u(f_i^1(s')) = u(f_i^1(s''))$.

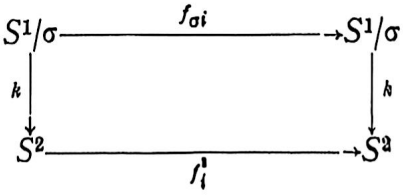
Avem $u(f'(s')) = f_i^2(u(s')) = f_i^2(u(s'')) = u(f_i^1(s''))$.

Surjecția u: $S^1 \to S^2$ se factorizează canonic ca în diagrama:

(III.4.1)



unde k este o bijecție. Atunci perechea de aplicații $\chi_1 = (1_I, k)$ este un izomorfism de la semiautomatul A_1/σ la semiautomatul A_2 deoarece diagrama

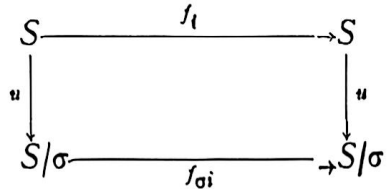


este comutativă, pentru orice $i \in I$.

Într-adevăr avem: $k(f_{\sigma i}([s_1])) = k([f^1(s_1, i)]) = u(f^1(s_1, i)) = f_i^2(u(s_1)) = f_i^2(k[s_1])$. ■

Teorema III.4.5. *Fie σ o congruență pe semiautomatul $A = [I, S, f]$. Atunci există un homomorfism surjectiv $\chi = (1_I, u)$: $A \to A/\sigma$.*

Demonstrație. Aplicația u: $S \to S/\sigma$ dată prin $u(s) = [s]$ face comutativă diagrama:



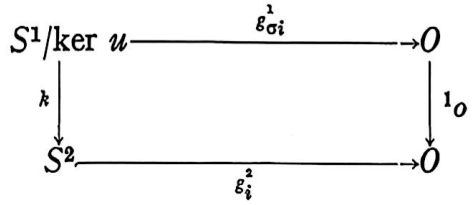
deoarece $f_{\sigma i}(u(s)) = f_{\sigma i}([s]) = [f(s, i)] = u(f(s, i)) = u(f_i(s))$. ■

Observația III.4.7. Fie $A_j = [I, S^j, O, f^j, g^j]$, $j = 1, 2$, și un S-homomorfism surjectiv $\chi = (1_I, u, 1_O)$: $A_1 \to A_2$. Relația $\sigma \subseteq S^1 \times S^1$, $\sigma = \ker u$ este o congruență pe automatul A_1. Această observație este completată de:

Teorema III.4.6. *Congruența σ indusă de homomorfismul χ este consistentă și automatul A_2 este izomorf cu automatul cît A_1/σ.*

Demonstrație. Deoarece $\chi = (1_I, u, 1_O)$ este un homomorfism avem $g_i^1 = g_i^2 u$, iar dacă $u(s') = u(s'')$ atunci $g_i^1(s') = g_i^1(s'')$ și deci σ este consistentă.

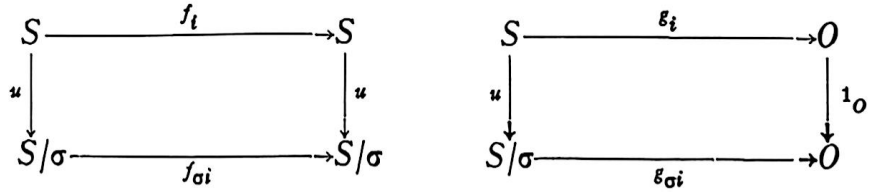
Tripletul $\chi = (1_I, k, 1_O)$: $A_1/\sigma \to A_2$, unde k: $S^1/\sigma \to S^2$ este aplicația de factorizare din diagrama III.4.1, este un izomorfism ținînd seama de demonstrația teoremei precedente și de faptul că diagrama:



este comutativă, deoarece $g_{\sigma i}^1([s]) = g^1(s, i) = g_i^1(s) = g_i^2(u(s)) = g_i^2(k([s]))$. ■

Teorema III.4.7. *Fie σ o congruență consistentă pe automatul $A = [I, S, O, f, g]$. Atunci există un homomorfism surjectiv $\chi = (1_I, u, 1_O)$: $A \to A/\sigma$.*

Demonstrație. Luînd $u(s) = [s]$ diagramele



sînt comutative. Verificarea comutativității primei diagrame a fost făcută în teorema III.4.5. În ceea ce privește a doua diagramă avem $g_{\sigma i}(u(s)) = g_{\sigma i}([s]) = g(s, i) = g_i(s)$. ■

Vom descrie un procedeu pentru determinarea congruențelor unui automat finit, bazat pe următoarea:

Teorema III.4.8. *Fie* $\theta_{s_1 s_2}$ *cea mai mică congruență pe automatul* A *cu proprietatea* $(s_1, s_2) \in \theta_{s_1 s_2}$ *și* θ *o congruență oarecare. Atunci,*

$$\theta = \bigvee \{\theta_{s's''} | (s', s'') \in \theta\}.$$

Demonstrație. Dacă $(s', s'') \in \theta$ atunci $\theta_{s's''} \leqslant \theta$ și $\bigvee \{\theta_{s's''} | (s', s'') \in \theta\} \leqslant \theta$. Dacă $(s_\alpha, s_\beta) \in \bigvee \{\theta_{s's''} | (s', s'') \in \theta\}$ avem $(s_\alpha, s_\beta) \in \theta_{s_1's_1''}$, $(s_1, s_2) \in \theta_{s_1's_1''}$, ..., $(s_n, s_\beta) \in \theta_{s_\beta' s_\beta''}$ și $(s_1', s_1'') \in \theta$, ..., $(s_\beta', s_\beta'') \in \theta$. Deoarece $\theta_{s_k's_k''} \leqslant \theta$, $k = \overline{1, n}$, β avem $(s_\alpha, s_1) \in \theta$, $(s_1, s_2) \in \theta$, ..., $(s_n, s_\beta) \in \theta$, de unde $(s_\alpha, s_\beta) \in \theta$, adică $\theta \leqslant \bigvee \{\theta_{s's''} | (s', s'') \in \theta\}$. ■

Observația III.4.8. Găsirea congruențelor θ pe automatul A revine la determinarea congruențelor $\theta_{s's''}$ pentru toate prechile $(s', s'') \in S \times S$. Să descriem un procedeu de găsire a congruențelor $\theta_{s's''}$.

Fie $I = \{i_1, i_2, ..., i_m\}$. Considerăm blocul $B_0 = \{s', s''\}$ și fie $S_{01}^{i_j} = f(B_0, i_j)$, $j = \overline{1, m}$. În această primă fază reunim într-un singur bloc toate perechile de mulțimi oarecare $S_{01}^{i_j'}$, $S_{01}^{i_j''}$ nedisjuncte și obținem blocurile B_1^1, ..., $B_1^{k_1}$. În continuare considerăm mulțimile $S_{h_2}^{i_j} = f(B_1^h, i_j)$, $h = \overline{1, k_1}$ și $j = \overline{1, m}$ pe care le reunim în noi blocuri în cazul în care sînt nedisjuncte: B_2^1, ..., $B_2^{k_2}$ etc.

Procedeul se continuă atîta timp cît în fiecare pas se obține cel puțin un bloc nou și procedeul este finit, deoarece $|S| < +\infty$.

Fie B_1, ..., B_α blocurile obținute prin aplicarea algoritmului descris anterior și fie $B_{\alpha+1} = S \setminus \bigcup_{j=1}^{\alpha} B_j$. Dacă $B_{j_1} \cap B_{j_2} \neq \emptyset$ vom reuni blocurile B_{j_1}, B_{j_2}.

Blocurile B_1', ..., B_β' obținute din blocurile B_1, ..., B_α, $B_{\alpha+1}$ prin eventuale reuniuni, constituie mulțimea $S/\theta_{s's''}$, deoarece două stări s_1, s_2 care aparțin unui bloc B_j' sînt congruente după orice congruență pe S care identifică stările s' și s''.

Exemplul III.4.1. Fie automatul $A = [\{i_1, i_2\}, \{s_1, s_2, s_3, s_4, s_5, s_6\}, \{0, 1\}, f, g]$ unde funcțiile f și g sînt date de

f	s_1	s_2	s_3	s_4	s_5	s_6
i_1	s_4	s_6	s_5	s_2	s_1	s_2
i_2	s_1	s_3	s_2	s_5	s_4	s_4

g	s_1	s_2	s_3	s_4	s_5	s_6
i_1	0	0	0	1	0	0
i_2	0	0	0	1	0	0

Să calculăm $\theta_{s_1 s_2}$. Avem

$$B_0 = \{s_1, s_2\}, \quad S_{01}^{i_1} = \{s_4, s_6\}, \quad S_{01}^{i_2} = \{s_3\}$$

și deci

$$B_1^1 = \{s_4, s_6\}, \; B_1^2 = \{s_3\}.$$

Apoi

$$S_{12}^{i_1} = \{s_2, s_3\}, \; S_{12}^{i_2} = \{s_5, s_4\}, \; S_{22}^{i_1} = \{s_5\}, \; S_{22}^{i_2} = \{s_2\},$$

deci

$$B_2^1 = S_{12}^{i_1} \cup S_{22}^{i_2} = \{s_2, s_3\} \quad \text{și} \quad B_2^2 = S_{12}^{i_2} \cup S_{22}^{i_1} = \{s_4, s_5\}.$$

În continuare obținem

$$S_{13}^{i_1} = \{s_6, s_5\}, \; S_{13}^{i_2} = \{s_3, s_2\}, \; S_{23}^{i_1} = \{s_2, s_1\}, \; S_{23}^{i_2} = \{s_5, s_4\},$$

de unde

$$B_3^1 = \{s_1, s_2, s_3\}, \; B_3^2 = \{s_6, s_5, s_4\}.$$

În fine,

$$S_{14}^{i_1} = \{s_4, s_5, s_6\}, \; S_{14}^{i_2} = \{s_3, s_2\}, \; S_{24}^{i_1} = \{s_1, s_2, s_3\} \quad \text{și} \quad S_{24}^{i_2} = \{s_4, s_5\},$$

de unde

$$B_4^1 = \{s_4, s_5, s_6\} \quad \text{și} \quad B_4^2 = \{s_1, s_2, s_3\}.$$

Blocurile găsite în acest pas coincizînd cu blocuri găsite anterior, algoritmul s-a terminat. Blocurile obținute astfel sînt:

$$\{s_1, s_2\}, \; \{s_3\}, \; \{s_2, s_3\}, \; \{s_4, s_5\}, \; \{s_1, s_2, s_3\}, \; \{s_4, s_5, s_6\}.$$

Deci

$$S/\theta_{s_1 s_2} = \{\{s_1, s_2, s_3\}, \; \{s_4, s_5, s_6\}\}.$$

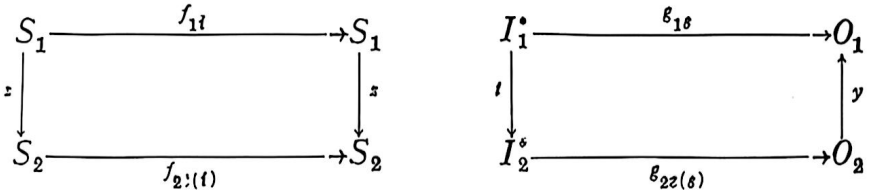
Propunem cititorului să arate că

$$\theta_{s_3 s_4} = \{\{s_3, s_4\}, \; \{s_1, s_6\}, \; \{s_2, s_5\}\}.$$

§ III.5. DESCOMPUNEREA ÎN SERIE ȘI ÎN PARALEL ÎN SENS HARTMANIS-STEARNS A AUTOMATELOR DETERMINISTE

O noțiune mai tare decît noțiunea de simulare prezentată în definiția II.7.2 este cea de suprasimulare pe care o vom introduce în acest paragraf. Ne vom ocupa de condițiile în care automatele finite pot fi suprasimulate de automate obținute prin legarea în serie sau în paralel (în sens Hartmanis-Stearns, vezi observația II.8.2) a unor automate mai simple.

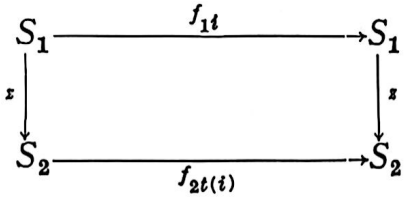
Definiția III.5.1. Fie $A_j = [I_j, S_j, O_j, f_j, g_j]$, $j = 1, 2$ două automate. Tripletul $\Phi = (t, z, y)$, unde $t: I_1 \to I_2$, $z: S_1 \to S_2$ $y: O_2 \to O_1$ este o *suprasimulare* a automatului A_1 de către automatul A_2 dacă diagramele



sînt comutative. Dacă există o suprasimulare de la A_1 la A_2 vom nota acest lucru cu $A_1 \perp\!\!\!\perp A_2$.

Definiția III.5.2. *Suprasimularea* $\Phi = (t, z, y)$ este *injectivă* dacă și numai dacă aplicația z este injectivă.

Definiția III.5.3. Perechea $\Phi = (t, z)$, unde $t: I_1 \to I_2$, $z: S_1 \to S_2$ este o *semisimulare* a automatului A_1 de către automatul A_2 dacă diagrama



este comutativă.

Observația III.5.1. Orice suprasimulare este o simulare (vezi definiția II.7.2) și o semisimulare.

Teorema III.5.1. *Automatul* $A = [I, S, O, f, g]$ *poate fi suprasimulat injectiv de automatul* $A_1 \to A_2$, *unde* $A_j = [I_j, S_j, O_j, f_j, g_j]$, $|S_j| < |S|$, $j = 1, 2$ *dacă și numai dacă există o congruență nebanală* *) σ *pe automatul* A.

Demonstrație. Să presupunem că $A \perp (A_1 \to A_2) = [I_1, S_2 \times S_1, O_2 \times O_1, \vec{f}, \vec{g}]$ și fie $\Phi = (t, z, y)$ suprasimularea injectivă corespunzătoare. Aplicația injectivă $z: S \to S_2 \times S_1$ generează o congruență σ pe automatul A, unde $\sigma = \ker \mathrm{pr}_2 z$, $\mathrm{pr}_2 z: S_2 \times S_1 \to S_1$.

Să arătăm că σ este o congruență. Fie $(s', s'') \in \sigma$, adică

$$\mathrm{pr}_2 z(s') = \mathrm{pr}_2 z(s'').$$

Deoarece

$$\vec{f}((s_1, s_2), i) = (f_2(s_2, g_1(s_1, i)), f_1(s_1, i)) \quad \text{și} \quad A \perp (A_1 \to A_2)$$

*) O congruență nebanală σ este o congruență cu proprietatea $\sigma \notin \{\iota_S, \omega_S\}$

avem

$$\mathrm{pr}_2 z(f_t(s')) = \mathrm{pr}_2 \vec{f}_{t(i)}(z(s')) = f_1(\mathrm{pr}_2 z(s'), t(i)) = f_1(\mathrm{pr}_2 z(s''), t(i)) =$$

$$= \mathrm{pr}_2 \vec{f}_{t(i)}(z(s'')) = \mathrm{pr}_2 z(f_t(s'')) = \mathrm{pr}_2 (f_t(s'')), \quad \text{deci} \quad (f_t(s'), f_t(s'')) \in \sigma.$$

Congruența σ este nebanală deoarece în caz contrar, dacă $\sigma = \iota_S$ aplicația $\mathrm{pr}_2 z\colon S \to S_1$ este injectivă și $|S| \leqslant |S_1|$ contrar ipotezei, iar dacă $\sigma = \omega_S$ atunci deoarece $|\mathrm{pr}_2 z(S)| = 1$, aplicația $\mathrm{pr}_1 z\colon S \to S_2$ este injectivă și deci $|S| \leqslant |S_2|$ contrar presupunerii inițiale.

Să presupunem acum că σ este o congruență nebanală pe A și vom arăta că există o suprasimulare injectivă a lui A prin gruparea în serie a două automate A_1 și A_2, $A_1 \to A_2$.

Vom construi cele două automate. Pentru aceasta fie τ o echivalență nebanală pe S cu proprietatea $\tau \cap \sigma = \iota_S$. Un mod de a obține o astfel de echivalență este următorul. Fie $S/\sigma = \{B_j \mid j \in J\}$ și $k = \max_{j \in J} |B_j|$. Deoarece σ este o congruență nebanală, $k < |S|$ și $|S/\sigma| < |S|$. Numerotăm stările din fiecare bloc B_j prin $1, 2, \ldots, n_j$; $n_j \leqslant k$. Stările numerotate identic din fiecare din blocurile B_j se consideră în relația τ. Fie deci $S/\tau = \{H_l \mid l = \overline{1, k}\}$. Să observăm că $|B_j \cap H_l| = 1, \forall j \in J, l \in \{1, \ldots, k\}$, $\max_{l=\overline{1,k}} |H_l| = |S/\sigma|$ și $|S/\tau| < |S|$.

Considerăm acum automatele

$$A_1 = [I, S/\sigma, S/\sigma \times I, f_1, g_1] \quad \text{și} \quad A_2 = [S/\sigma \times I, S/\tau, O, f_2, g_2],$$

unde

$$f_1([s]_\sigma, i) = [(f(s, i)]_\sigma, \quad g_1([s]_\sigma, i) = ([s]_\sigma, i), \quad f_2([s_1]_\tau, ([s]_\sigma, i)) = [s_2]_\tau,$$

cu

$$s_2 = f([s_1]_\tau \cap [s]_\sigma, i), \quad g_2([s_1]_\tau, ([s]_\sigma, i)) = g([s_1]_\tau \cap [s]_\sigma, i)$$

dacă $[s_1]_\tau \cap [s]_\sigma \neq \emptyset$ și arbitrar, în caz contrar.

Tripletul $\Phi = (t, z, y)$, unde aplicațiile $t\colon I^* \to I^*$, $z\colon S \to (S/\tau \times S/\sigma)$ și $y\colon O \times S/\sigma \times I \to O$ sînt date de $t = 1_I$, $z(s) = ([s]_\tau, [s]_\sigma)$ și $y = \mathrm{pr}_1$ este o suprasimulare injectivă deoarece aplicația z este o injecție și diagramele

$$\begin{array}{ccc} S & \xrightarrow{f_t} & S \\ {\scriptstyle z}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle z} \\ S/\tau \times S/\sigma & \xrightarrow[\vec{f}_t]{} & S/\tau \times S/\sigma \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} I^* & \xrightarrow{g_s} & O \\ {\scriptstyle 1_I}\downarrow & & \uparrow{\scriptstyle \mathrm{pr}_1} \\ I^* & \xrightarrow[\vec{g}_{z(s)}]{} & O \times S/\sigma \times I \end{array}$$

sînt comutative. Într-adevăr,

$$z(f_t(s)) = z(f(s, i)) = ([f(s, i)]_\tau, [f(s, i)]_\sigma)$$

iar

$$\vec{f}_1(z(s)) = \vec{f}(([s]_\tau, [s]_\sigma), i) = (f_2([s]_\tau, g_1([s]_\sigma, i)), f_1([s]_\sigma, i)) =$$

$$= f_2([s]_\tau, ([s]_\sigma, i)), [f(s, i)]_\sigma) = ([f(s, i)]_\tau, [(f(s, i)]_\sigma)$$

și

$$\mathrm{pr}_1 \vec{g}_{z(s)}(i) = \mathrm{pr}_1 \vec{g}(([s]_\tau, [s]_\sigma), i) = \mathrm{pr}_1 (g_2([s]_\tau, g_1([s]_\sigma, i)), g_1([s]_\sigma, i)) =$$

$$= \mathrm{pr}_1 (g_2([s]_\tau, ([s]_\sigma, i)), ([s]_\sigma, i)) = g([s]_\tau \cap [s]_\sigma, i) = g(s, i) = g_s(i). \blacksquare$$

Observația III.5.2. Rolul automatelor A_1 și A_2 în automatul $A_1 \to A_2$ este următorul: Automatul A_1 „calculează" clasa din S/σ care conține starea în care va trece automatul A și anume $[(f(s, i)]_\sigma$ și livrează această informație automatului A_2. Acesta „alege" dintre stările clasei $[f(s, i)]_\sigma$ chiar starea $f(s, i)$.

Prin urmare „calculul" stării următoare $f(s, i)$ se împarte între cele două automate.

Teorema III.5.2. *Automatul* $A = [I, S, O, f, g]$ *poate fi suprasimulat injectiv de automatul* $A_1 \| A_2$ *unde* $A_j = [I_j, S_j, O_j, f_j, g_j]$, $|S_j| < |S|$, $j = 1, 2$ *dacă și numai dacă există două congruențe nebanale* σ_1 *și* σ_2 *pe* A *astfel ca* $\sigma_1 \wedge \sigma_2 = \iota_S$.

Demonstrație. Să presupunem că $A \perp (A_1 \| A_2) = [I_2 \times I_1, S_2 \times S_1, O_2 \times O_1, \overline{f}, \overline{g}]$ și fie $\Phi = (t, z, y)$ suprasimularea injectivă corespunzătoare. Aplicația injectivă $z: S \to S_2 \times S_1$ generează două relații de echivalență $\sigma_j = \mathrm{pr}_j z$; $j, j' = 1, 2, j \neq j'$. Cum z este injectivă $\sigma_1 \wedge \sigma_2 = \iota_S$.

Să arătăm că σ_1 și σ_2 sînt congruențe nebanale pe S.

Fie $(s', s'') \in \sigma_1$, adică $\mathrm{pr}_2 z(s') = \mathrm{pr}_2 z(s'')$. Avem $z(f(s, i)) = \overline{f}(z(s), t(i)) = (f_2(\mathrm{pr}_1 (z(s)), i_2), f_1(\mathrm{pr}_2 (z(s)), i_1))$, unde $t(i) = (i_1, i_2)$. De aici $\mathrm{pr}_2 z(f_i(s)) = f_1(\mathrm{pr}_2 (z(s)), i_1)$ de unde $\mathrm{pr}_2 z(f_i(s')) = \mathrm{pr}_2 z(f_i(s''))$, adică $(f_i(s'), f_i(s'')) \in \sigma_1$.

Similar se arată că și σ_2 este o congruență.

Cum $|S_1| < |S|$, $|S_2| < |S|$ și $|S| \leqslant |S_1| \cdot |S_2|$ (deoarece z este o aplicație injectivă) rezultă că σ_1 și σ_2 sînt congruențe nebanale deoarece $|S/\sigma_1| = |S_1|$, $|S/\sigma_2| = |S_2|$, deci $1 < |S/\sigma_j| < |S|$.

Reciproc, să presupunem că σ_1 și σ_2 sînt congruențe nebanale pe A și $\sigma_1 \wedge \sigma_2 = \iota_S$. Vom arăta că $A \perp (A_1 \| A_2)$ construind efectiv automatele A_1 și A_2.

Definim $A_1 = [I, S/\sigma_1, S/\sigma_1 \times I, f_1, g_1]$ și $A_2 = [I, S/\sigma_2, S/\sigma_2 \times I, f_2, g_2]$, unde $f_j([s]_{\sigma_j}, i) = [f(s, i)]_{\sigma_j}$ și $g_j([s]_{\sigma_j}, i) = ([s]_{\sigma_j}, i)$, $j = 1, 2$.

Tripletul $\Phi = (t, z, y)$, unde aplicațiile

$$t: I \to I \times I,\ z: S \to S/\sigma_2 \times S/\sigma_1 \quad \text{și} \quad y: ((S/\sigma_2) \times I) \times ((S/\sigma_1) \times I) \to O,$$

sînt date prin:

$$t(i) = (i, i),\ z(s) = ([s]_{\sigma_1}, [s]_{\sigma_1})$$

$$\gamma'(([s_2]_{\sigma_1}, i_2), ([s_1]_{\sigma_1}, i)) = \begin{cases} g([s_2]_{\sigma_1} \cap [s_1]_{\sigma_1}, i), & \text{dacă } i_1 = i_2 = i \\ \text{arbitrar, în caz contrar} \end{cases}$$

face comutative diagramele

$$\begin{array}{ccc} S & \xrightarrow{f_t} & S \\ {\scriptstyle x}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle x} \\ S/\sigma_2 \times S/\sigma_1 & \xrightarrow[\bar{f}_{(i,i)}]{} & S/\sigma_2 \times S/\sigma_1 \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} I^* & \xrightarrow{g_s} & O \\ {\scriptstyle t}\downarrow & & \uparrow{\scriptstyle y} \\ I^* \times I^* & \xrightarrow[\bar{g}_{x(s)}]{} & (S/\sigma_2 \times I) \times (S/\sigma_1 \times I) \end{array}$$

Într-adevăr,

$$\bar{f}_{(i,i)}(z(s)) = \bar{f}_{(i,i)}([s]_{\sigma_2}, [s]_{\sigma_1}) = ([f(s, i)]_{\sigma_2}, [f(s, i)]_{\sigma_1}) = z(f_t(s))$$

și

$$\gamma'(\bar{g}_{x(s)}(t(i))) = \gamma(\bar{g}(([s]_{\sigma_2}, [s_{\sigma_1}]), (i, i))) = \gamma\,(([s]_{\sigma_2}, i), ([s]_{\sigma_1}, i)) = g(s, i) = g_s(i).$$

Deoarece σ_1 și σ_2 sînt congruente nebanale $1 < |S/\sigma_j| < |S|$, $j = 1, 2$. ■

Observația III.5.3. Dacă automatul A este suprasimulabil injectiv prin legarea în paralel a două automate, el este suprasimulabil injectiv și prin legarea în serie a două automate.

Exemplul III.5.1. Pentru automatul A din exemplul III.4.1 avem $\theta_{s_1,s_2} \wedge \theta_{s_3,s_4} = \iota_S$. Ca atare automatul A este suprasimulabil injectiv prin legarea în paralel a două automate și conform observației III.5.3 este suprasimulabil injectiv și prin legarea în serie a două automate.

Avem

$$A \perp (A_1 \to A_2),$$

unde

$$A_1 = [\{i_1, i_2\}, \{S_1, S_2\}, \{S_1, S_2\} \times \{i_1, i_2\}, f_1, g_1],$$

$$A_2 = [\{i_1, i_2\}, \{S_3, S_4, S_5\}, \{S_3, S_4, S_5\} \times \{i_1, i_2\}, f_2, g_2].$$

Aici

$$S_1 = \{s_1, s_2, s_3\},\ S_2 = \{s_4, s_5, s_6\},\ S_3 = \{s_3, s_4\},\ S_4 = \{s_2, s_5\},\ S_5 = \{s_1, s_6\}$$

și

f_1	S_1	S_2	g_1	S_1	S_2
i_1	S_2	S_1	i_1	(S_1, i_1)	(S_2, i_1)
i_2	S_1	S_2	i_2	(S_1, i_2)	(S_1, i_2)

și

f_2	S_3	S_4	S_5	g_2	S_3	S_4	S_5
i_1	S_4	S_5	S_3	i_1	(S_3, i_1)	(S_4, i_1)	(S_5, i_1)
i_2	S_4	S_3	S_3	i_2	(S_1, i_2)	(S_1, i_2)	(S_1, i_2)

Pe de altă parte luînd $\tau = \theta_{s_3 s_4}$ avem $A \perp (A_1 \to A_3)$, unde

$$A_3 = [\{S_1, S_2\} \times \{i_1, i_2\}, \{S_3, S_4, S_5\}, \{0, 1\}, f_3, g_3],$$

unde

f_3	S_3	S_4	S_5
(S_1, i_1)	S_4	S_5	S_3
(S_1, i_2)	S_4	S_3	S_3
(S_2, i_1)	S_4	S_5	S_3
(S_2, i_2)	S_4	S_3	S_3

g_3	S_3	S_4	S_5
(S_1, i_1)	0	0	0
(S_1, i_2)	0	0	0
(S_2, i_1)	1	0	0
(S_2, i_2)	1	0	0

Definiția III.5.4. Dacă σ_1, σ_2 sînt două congruențe pe automatul A cu proprietățile

$$\sigma_1 \wedge \sigma_2 = \iota_S,$$

și

$$\sigma_1 \vee \sigma_2 = \omega_S,$$

automatul $A_1 || A_2$ *suprasimulează complet* automatul A, unde A_1 și A_2 sînt automatele introduse în demonstrarea teoremei III. 5.2.

Teorema III.5.3. *Dacă laticea congruențelor automatului A este distributivă și σ_1 este o congruență pe A atunci există cel mult o congruență σ_2 pe A astfel ca perechea σ_1, σ_2 să genereze o suprasimulare completă.*

Demonstrație. Acest rezultat se obține imediat ținînd seama de teorema I.6.2. ■

§ III.6. ECHIVALENȚE ASOCIATE PE UN AUTOMAT DETERMINIST ȘI ALGEBRE DE ASOCIERE

Fie $A = [I, S, O, f, g]$ un automat determinist finit.

Definiția III.6.1. Echivalențele σ_1, $\sigma_2 \in \mathrm{Eq}(S)$ sînt *echivalențe asociate* $(\sigma_1, \sigma_2) \in \alpha$ dacă din $(s', s'') \in \sigma_1$ rezultă $(f_i(s'), f_i(s'')) \in \sigma_2$, oricare ar fi $i \in I$. Vom numi $\alpha \subseteq \mathrm{Eq}(S) \times \mathrm{Eq}(S)$ relația de asociere a echivalențelor.

Dacă $(\sigma_1, \sigma_2) \in \alpha$ atunci aceasta înseamnă că dacă la momentul t cunoaştem starea automatului pînă la o echivalenţă σ_1 în momentul $t+1$ cunoaştem starea în care trece automatul pînă la o echivalenţă σ_2.

Observaţia III.6.1. O echivalenţă σ este o congruenţă dacă şi numai dacă $(\sigma, \sigma) \in \alpha$.

Observaţia III.6.2. Oricare ar fi echivalenţa σ avem $(\iota_S, \sigma) \in \alpha$ şi $(\sigma, \omega_S) \in \alpha$.

Teorema III.6.1. *Dacă* $(\sigma_1, \sigma_2) \in \alpha$, $(\sigma_1', \sigma_2') \in \alpha$ *atunci* $(\sigma_1 \wedge \sigma_1', \sigma_2 \wedge \sigma_2') \in \alpha$, $(\sigma_1 \vee \sigma_1', \sigma_2 \vee \sigma_2') \in \alpha$, *adică relaţia de asociere* α *este o congruenţă pe laticea echivalenţelor automatului.*

Demonstraţie. Fie $(s_1, s_2) \in \sigma_1 \wedge \sigma_1'$. Atunci $(s_1, s_2) \in \sigma_1$ şi $(s_1, s_2) \in \sigma_1'$, de unde $(f_i(s_1), f_i(s_2)) \in \sigma_2$ şi $(f_i(s_1), f_i(s_2)) \in \sigma_2'$, adică $(f_i(s_1), f_i(s_2)) \in \sigma_2 \wedge \sigma_2'$, $\forall i \in I$, ceea ce arată că $(\sigma_1 \wedge \sigma_1', \sigma_2 \wedge \sigma_2') \in \alpha$.

Apoi, dacă $(s_1, s_2) \in \sigma_1 \vee \sigma_1'$ avem: $(s_1, s^1) \in \sigma_1$, $(s^1, s^2) \in \sigma_1'$, $(s^2, s^3) \in \sigma_1$, ..., $(s^m, s_2) \in \sigma_1'$, de unde $(f_i(s_1), f_i(s^1)) \in \sigma_2$, $(f_i(s^1), f_i(s^2)) \in \sigma_2'$, ..., $(f_i(s^m), f_i(s_2)) \in \in \sigma_2'$, adică $(f_i(s_1), f_i(s_2)) \in \sigma_2 \vee \sigma_2'$.

Fie $\mathrm{Eq}(A)$ laticea echivalenţelor automatului A.

Definiţia III.6.2. *Operatorii lui Hartmanis şi Stearns* [9] $\mathbf{M} : \mathrm{Eq}(S) \to \mathrm{Eq}(S)$ şi $\mathbf{m} : \mathrm{Eq}(S) \to \mathrm{Eq}(S)$ sînt daţi de:

$$\mathbf{M}(\sigma) = \vee\{\sigma_1 \mid (\sigma_1, \sigma) \in \alpha\},$$

$$\mathbf{m}(\sigma) = \wedge\{\sigma_1 \mid (\sigma, \sigma_1) \in \alpha\}.$$

Observaţia III.6.3. Operatorul $\mathbf{M}(\sigma)$ ne dă cea mai mare echivalenţă cu proprietatea $(\mathbf{M}(\sigma), \sigma) \in \alpha$, iar operatorul $\mathbf{m}(\sigma)$ ne dă cea mai mică echivalenţă cu proprietatea $(\sigma, \mathbf{m}(\sigma)) \in \alpha$.

Observaţia III.6.4. Să presupunem că starea unui automat la momentul t este cunoscută pînă la o echivalenţă σ. Atunci $\mathbf{m}(\sigma)$ este cea mai fină echivalenţă pînă la care cunoaştem starea în care trece automatul în momentul $t+1$, iar $\mathbf{M}(\sigma)$ este cea mai puţin fină echivalenţă pe S pînă la care trebuie să cunoaştem starea la momentul $t-1$, pentru a cunoaşte starea automatului la momentul t, pînă la echivalenţa σ.

În continuare vom calcula efectiv $\mathbf{M}(\sigma)$ şi $\mathbf{m}(\sigma)$ pentru o echivalenţă σ pe mulţimea stărilor unui automat.

Exemplul III.6.1. Fie automatul Moore cu întîrziere, $A = [\{i_1, i_2\}, \{s_1, s_2, s_3, s_4, s_5\}, \{0, 1\}, f, g]$, unde funcţiile f şi g sînt date în tabloul

f	s_1	s_2	s_3	s_4	s_5	g	s_1	s_2	s_3	s_4	s_5
i_1	s_5	s_4	s_4	s_1	s_2	i_1	0	0	1	1	0
i_2	s_3	s_2	s_1	s_4	s_5	i_1	0	0	1	1	0

Fie echivalența σ unde

$$S/\sigma = \{\{s_1, s_2\}, \{s_3, s_4\}, \{s_5\}\}.$$

Avem

$$f(\{s_2, s_1\}, i_1) = \{s_4, s_5\},\ f(\{s_1, s_2\}, i_2) = \{s_2, s_3\},\ f(s_3, s_4\}, i_1) =$$
$$= \{s_1, s_4\} = f(\{s_3, s_4\}, i_2), f(\{s_5\}, i_1) = \{s_2\} \subseteq$$
$$\subseteq \{s_2, s_3\}, f(\{s_5\}, i_2) = \{s_5\} \subseteq \{s_4, s_5\},$$

deci blocurile din S/σ sînt duse prin f în blocurile $\{s_4, s_5\}$, $\{s_2, s_3\}$, $\{s_1, s_4\}$.

Ca atare, pentru cea mai fină echivalență $\sigma_1 = \mathbf{m}(\sigma)$ generată de mulțimile $\{s_4, s_5\}$, $\{s_2, s_3\}$. $\{s_1, s_4\}$ avem $S/\sigma_1 = \{\{s_1, s_4, s_5\}, \{s_2, s_3\}\}$.

Pentru a determina echivalența $\mathbf{M}(\sigma)$ să notăm $S_1 = \{s_1, s_2\}$, $S_2 = \{s_3, s_4\}$, $S_3 = \{s_5\}$ și să înlocuim în tabelul de mai sus, care-l dă pe f, stările cu simbolii blocurilor corespunzătoare. Obținem astfel tabelul

	s_1	s_2	s_3	s_4	s_5
i_1	S_1	S_2	S_2	S_1	S_1
i_2	S_2	S_1	S_1	S_2	S_3

Avem $(s_{j_1}, s_{j_2}) \in \mathbf{M}(\sigma)$ dacă coloanele J_1 și J_2 din tabelul de mai sus sînt identice. Astfel $S/\mathbf{M}(\sigma) = \{\{s_1\}, \{s_2, s_3\}, \{s_4\}, \{s_5\}\}$.

Definiția III.6.3. Fie L_1, L_2 două latici finite. O sublatice $L \subseteq L_1 \times L_2$ este o *algebră de asociere* dacă $\forall x \in L_1$, $\forall y \in L_2$ avem $(x, 1_2) \in L$ și $(0_1, y) \in L$ unde 1_2 și 0_1 reprezintă respectiv ultimul element din L_2 și primul element din L_1.

Avem $(1_1, 1_2) \in L$ și $(0_1, 0_2) \in L$.

Observația III.6.5. În virtutea teoremei III.6.1 și a observației III.6.2, $\alpha \subseteq \mathrm{Eq}(S) \times \mathrm{Eq}(S)$ este o algebră de asociere.

Fie $L \subseteq L_1 \times L_2$ o algebră de asociere. Avem:

Teorema III.6.2. *Dacă* $(x, y) \in L$ *și* $x_1 \leqslant x$, $y \leqslant y_1$ *atunci* (x_1, y), (x, y_1), $(x_1, y_1) \in L$.

Demonstrație. Dacă $(x, y) \in L$, cum $(x_1, 1_2) \in L$ avem $(x \wedge x, y \wedge 1_2) = (x, y) \in L$. Apoi $(x, y_1) = (0_1, y_1) \vee (x, y) \in L$, de unde avem și $(x_1, y_1) \in L$. ■

Putem generaliza acum definiția III.6.2.

Definiția III.6.4. Fie $L \subseteq L_1 \times L_2$ o algebră de asociere. *Operatorii lui Hartmanis și Stearns* $\mathbf{M}: L_2 \to L_1$ și $\mathbf{m}: L_1 \to L_2$ sînt dați prin:

$$\mathbf{M}(y) = \vee\{x_j \mid (x_j, y) \in L\}. \tag{III.6.1}$$

$$\mathbf{m}(x) = \wedge\{y_j \mid (x, y_j) \in L\}. \tag{III.6.2}$$

Pe produsul cartezian $L_1 \times L_2$ vom introduce relația de ordine „$\leqslant$" definită prin

$$(x, y) \leqslant (x', y') \leftrightarrow x \leqslant x' \text{ și } y \leqslant y'.$$

Vom considera o submulțime specială a unei algebre de asociere, care va juca un rol important în cele ce urmează.

Definiția III.6.5. *Mulțimea perechilor extremale* ale algebrei de asociere L este mulțimea:

$$X(L) = \{(x, y) \mid (x, y) \in L, \quad x = \mathbf{M}(y), \quad y = \mathbf{m}(x)\}.$$

Teorema III.6.3. *Oricare ar fi* $x \in L_1$, $y \in L_2$ *avem* $(\mathbf{M}(y), y) \in L$ și $(x, \mathbf{m}(x)) \in L$.

Demonstrație. Deoarece L este o sublatice $L \subseteq L_1 \times L_2$ putem scrie

$$(\mathbf{M}(y), y) = (\vee\{x_j \mid (x_j, y) \in L\}, y) = (\vee\{x_j \mid (x_j, y) \in L\},$$
$$\vee\{y \mid (x_j, y) \in L\}) = \vee\{(x_j, y) \mid (x_j, y) \in L\} \in L.$$

Analog se arată că $(x, \mathbf{m}(x)) \in L$. ■

Proprietățile operatorilor **M** și **m** vor fi prezentate în teoremele III.6.4—7.

Teorema III.6.4. *Fie* $y_1, y_2 \in L$. *Atunci au loc proprietățile:*

a) **M** *este o aplicație izotonă, adică* $y_1 \geqslant y_2$ *atrage* $\mathbf{M}(y_1) \geqslant \mathbf{M}(y_2)$;

b) $\mathbf{M}(y_1 \vee y_2) \geqslant \mathbf{M}(y_1) \vee \mathbf{M}(y_2)$;

c) $\mathbf{M}(y_1 \wedge y_2) = \mathbf{M}(y_1) \wedge \mathbf{M}(y_2)$;

d) $(x, y) \in L \leftrightarrow x \leqslant \mathbf{M}(y)$.

Demonstrație.

a) Ținînd seama de teorema III.6.3 avem $(\mathbf{M}(y_2), y_2) \in L$ și deoarece $y_1 \geqslant y_2$ avem și $(\mathbf{M}(y_2), y_1) \in L$, conform teoremei III.6.2. De aici urmează $\mathbf{M}(y_1) \geqslant \mathbf{M}(y_2)$ în virtutea formulei (III.6.1).

b) Cum $y_1 \vee y_2 \geqslant y_1, y_2$ avem $\mathbf{M}(y_1 \vee y_2) \geqslant \mathbf{M}(y_1), \mathbf{M}(y_2)$, de unde $\mathbf{M}(y_1 \vee y_2) \geqslant \mathbf{M}(y_1) \vee \mathbf{M}(y_2)$.

c) Deoarece $y_1 \wedge y_2 \leqslant y_1, y_2$ obținem $\mathbf{M}(y_1 \wedge y_2) \leqslant \mathbf{M}(y_1) \wedge \mathbf{M}(y_2)$.

Conform teoremei III.6.3 $(\mathbf{M}(y_1), y_1) \in L$ și $(\mathbf{M}(y_2), y_2) \in L$, de unde $(\mathbf{M}(y_1) \wedge \mathbf{M}(y_2), y_1 \wedge y_2) \in L$ fiindcă L este o sublatice. Din formula III.6.1 rezultă atunci:

$$\mathbf{M}(y_1) \wedge \mathbf{M}(y_2) \leqslant \mathbf{M}(y_1 \wedge y_2),$$

de unde:

$$\mathbf{M}(y_1) \wedge \mathbf{M}(y_2) = \mathbf{M}(y_1 \wedge y_2).$$

d) Fie $(x, y) \in L$. Atunci, din formula (III.6.1) obținem $x \leqslant \mathbf{M}(y)$. Invers, fie (x, y) și $x \leqslant \mathbf{M}(y)$. Din $(\mathbf{M}(y), y) \in L$ și teorema III.6.2 urmează $(x, y) \in L$. ■

Teorema III.6.5. *Fie* $x_1, x_2 \in L_1$. *Pentru operatorul* $\mathbf{m}$ *avem*:

a) $\mathbf{m}$ *este o aplicație izotonă*;

b) $\mathbf{m}(x_1 \vee x_2) = \mathbf{m}(x_1) \vee \mathbf{m}(x_2)$;

c) $\mathbf{m}(x_1 \wedge x_2) \leqslant \mathbf{m}(x_1) \wedge \mathbf{m}(x_2)$;

d) $(x, y) \in L \leftrightarrow y \geqslant \mathbf{m}(x)$.

Demonstrație.

a) Din $(x_1, \mathbf{m}(x_1)) \in L$ și $x_2 \leqslant x_1$, urmează $(x_2, \mathbf{m}(x_1)) \in L$ prin urmare, ținînd seama de formula (II.6.2), $\mathbf{m}(x_2) \leqslant \mathbf{m}(x_1)$.

b) Deoarece $x_1 \vee x_2 \geqslant x_1, x_2$ urmează $\mathbf{m}(x_1 \vee x_2) \geqslant \mathbf{m}(x_1), \mathbf{m}(x_2)$ deci $\mathbf{m}(x_1 \vee x_2) \geqslant \mathbf{m}(x_1) \vee \mathbf{m}(x_2)$. Apoi, cum $(x_1, \mathbf{m}(x_1)), (x_2, \mathbf{m}(x_2)) \in L$ și L este o sublatice găsim $(x_1 \vee x_2, \mathbf{m}(x_1) \vee \mathbf{m}(x_2)) \in L$, adică $\mathbf{m}(x_1 \vee x_2) \leqslant \mathbf{m}(x_1) \vee \mathbf{m}(x_2)$ (vezi formula (III.6.2)) și deci

$$\mathbf{m}(x_1 \vee x_2) = \mathbf{m}(x_1) \vee \mathbf{m}(x_2).$$

c) Cum $x_1 \wedge x_2 \leqslant x_1, x_2$ rezultă $\mathbf{m}(x_1 \wedge x_2) \leqslant \mathbf{m}(x_1), \mathbf{m}(x_2)$, de unde $\mathbf{m}(x_1 \wedge x_2) \leqslant \mathbf{m}(x_1) \wedge \mathbf{m}(x_2)$.

d) Dacă $(x, y) \in L$, definiția operatorului $\mathbf{m}$ ne dă $y \geqslant \mathbf{m}(x)$, iar dacă $y \geqslant \mathbf{m}(x)$ pentru $(x, y) \in L_1 \times L_2$ atunci, deoarece $(x, \mathbf{m}(x)) \in L$ obținem $(x, y) \in L$. ■

Consecința III.6.1. Următoarele trei condiții sînt echivalente:

a) $(x, y) \in L$;

b) $y \geqslant \mathbf{m}(x)$;

c) $x \leqslant \mathbf{M}(y)$.

Rezultă imediat din teoremele III.6.4, punctul d) și III.6.5 punctul d). ■

Teorema III.6.6. *Au loc*:

a) $\mathbf{M}(\mathbf{m}(x)) \geqslant x$;

b) $\mathbf{m}(\mathbf{M}(y)) \leqslant y$;

c) $\mathbf{M}(\mathbf{m}(\mathbf{M}(y)) = \mathbf{M}(y)$;

d) $\mathbf{m}(\mathbf{M}(\mathbf{m}(x))) = \mathbf{m}(x)$.

Demonstrație.

a) Deoarece $(x, \mathbf{m}(x)) \in L$ avem $\mathbf{M}(\mathbf{m}(x)) \geqslant x$.

b) Similar, ca în cazul a).

c) Din b) avem $\mathbf{M}(\mathbf{m}(\mathbf{M}(y))) \leqslant \mathbf{M}(y)$, deoarece $\mathbf{M}$ este izotonă și, deoarece $(\mathbf{M}(y), \mathbf{m}(\mathbf{M}(y))) \in L$ găsim $\mathbf{M}(y) \leqslant \mathbf{M}(\mathbf{m}(\mathbf{M}(y)))$ de unde $\mathbf{M}(\mathbf{m}(\mathbf{M}(y))) = \mathbf{M}(y)$.

d) Similar, ca în cazul c). ■

Teorema III.6.7. *Mulțimea elementelor extremale ale algebrei de asociere L se bucură de următoarele proprietăți:*

a) $(\mathbf{M}(y), \mathbf{m}(\mathbf{M}(y))), (\mathbf{M}(m(x)), \mathbf{m}(x)) \in X(L)$;

b) *Fie* $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in X(L)$. Avem $x_1 \leqslant x_2$ *atunci și numai atunci cînd* $y_1 \leqslant y_2$;

c) *Mulțimea parțial ordonată* $(X(L), \leqslant)$ *este o latice* $(X(L), \vee, \wedge)$ *unde:*

$$(x_1, y_1) \vee (x_2, y_2) = (\mathbf{M}(y_1 \vee y_2), y_1 \vee y_2),$$

$$(x_1, y_1) \wedge (x_2, y_2) = (x_1 \wedge x_2, \mathbf{m}(x_1 \wedge x_2)).$$

Demonstrație.

a) Rezultă imediat, utilizînd teorema III.6.6, punctele a) și d).

b) Fie $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in X(L)$, adică $y_j = \mathbf{m}(x_j)$ și $x_j = \mathbf{M}(y_j)$, $j = 1, 2$. Dacă $x_1 \leqslant x_2$, $y_1 = \mathbf{m}(x_1) \leqslant \mathbf{m}(x_2) = y$, iar dacă $y_1 \leqslant y_2$, $x_1 = \mathbf{M}(y_1) \leqslant \leqslant \mathbf{M}(y_2) = x_2$.

c) Fie $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in X(L)$. Să arătăm că sup $\{(x_1, y_1), (x_2, y_2)\} = (\mathbf{M}(y_1 \vee y_2), y_1 \vee y_2)$. Într-adevăr, avem $y_1 \leqslant y_1 \vee y_2$ și $y_2 \leqslant y_1 \vee y_2$, iar $x_1 = \mathbf{M}(y_1) \leqslant \mathbf{M}(y_1 \vee y_2)$ și $x_2 = \mathbf{M}(y_2) \leqslant \mathbf{M}(y_1 \vee y_2)$, de unde $x_1 \vee x_2 \leqslant \leqslant \mathbf{M}(y_1 \vee y_2)$, deci $(x_j, y_j) \leqslant (\mathbf{M}(y_1 \vee y_2), y_1 \vee y_2)$, $j = 1, 2$.

Apoi, dacă $(x_j, y_j) \leqslant (x, y)$, $j = 1, 2$ avem $y_j \leqslant y$, $j = 1, 2$ de unde $y_1 \vee y_2 \leqslant y$, iar $\mathbf{M}(y_1 \vee y_2) \leqslant \mathbf{M}(y) = x$, prin urmare $(\mathbf{M}(y_1 \vee y_2), y_1 \vee y_2) \leqslant \leqslant (x, y)$. Deci $(\mathbf{M}(y_1 \vee y_2), y_1 \vee y_2)$ este supremumul elementelor $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ în laticea $(X(L); \vee, \wedge)$.

Similar se arată că $(x_1 \wedge x_2, \mathbf{m}(x_1 \wedge x_2))$ este infimumul elementelor (x_1, y_1), (x_2, y_2) în aceeași latice. ■

Observația III.6.6. Atragem atenția asupra faptului că laticea $(X(L), \vee, \wedge)$ nu este o sublatice a laticii $(L, \vee, \wedge)$ deși ordinea pe $X(L)$ este urma ordinii de pe L.

Mulțimea perechilor extremale $X(L)$ ale algebrei de asociere L caracterizează algebra L. Mai precis, are loc

Teorema III. 6.8. *Fie* $(x, y)\in L_1\times L_2$ *şi* $L\subseteq L_1\times L_2$ *o algebră de asociere. Condiţia necesară şi suficientă ca* $(x, y)\in L$ *este existenţa perechii* $(x', y')\in X(L)$ *astfel ca* $x'\geqslant x$ *şi* $y'\leqslant y$.

Demonstraţie. Condiţia este necesară. Fie $(x, y)\in L$, $x' = \mathbf{M}(y)$ şi $y' = \mathrm{m}(\mathbf{M}(y))$. Perechea $(x', y')\in X(L)$ deoarece $\mathrm{m}(x') = \mathrm{m}(\mathbf{M}(y) = y'$ şi $\mathbf{M}(y') = \mathbf{M}(\mathrm{m}(\mathbf{M}(y))) = \mathbf{M}(y) = x'$, conform teoremei III.6.6 punctul c). Apoi $x' = \mathbf{M}(y)\geqslant x$, din formula (III.6.1) şi $y' = \mathrm{m}(\mathbf{M}(y))\leqslant y$, din punctul b) al teoremei III.6.6.

Condiţia este suficientă. Fie $(x' y')\in X(L)$ şi $(x, y)\in L_1\times L_2$ cu $x'\geqslant x$ şi $y'\leqslant y$. Deoarece $X(L)\subseteq L$, conform teoremei III.6.2 urmează $(x, y)\in L$ ■

Consecinţa III.6.2. Dacă (x_1, y_1), $(x_2, y_2)\in X(L)$ următoarele trei afirmaţii sînt echivalente

a) $(x_1, y_1)\geqslant (x_2, y_2)$;
b) $x_1\geqslant x_2$;
c) $y_1\geqslant y_2$.

Rezultă imediat din teorema III.6.7 punctul b). ■

Vom presupune în continuare că $L_1 = L_2$. Fie $L\subseteq L_1\times L_1$ o algebră de asociere. Putem formula în cadrul teoriei laticelor proprietatea de congruenţă.

Definiţia III.6.6. *Elementul* $x\in L_1$ are *proprietatea de congruenţă relativ la algebra de asociere* L dacă şi numai dacă $(x, x)\in L$.

Vom nota cu $C_L = \{x\,|\,x\in L_1, (x, x)\in L\}$, mulţimea elementelor cu proprietatea de congruenţă din L.

Teorema III.6.9. *Mulţimea* C_L *este o sublatice a laticei* L_1 *cu* $0\in L_1$, $1\in L_1$ *şi*

$$(\text{III.6.3})\quad C_L = \{x\,|\,x\in L_1,\ \ x\geqslant \mathrm{m}(x)\} = \{x\,|\,x\in L_1,\ \ x\leqslant \mathbf{M}(x)\}.$$

Demonstraţie. Faptul că C_L este o sublatice cu $0, 1\in C_L$ rezultă din proprietăţile corespunzătoare pentru L (vezi definiţia III.6.3). Egalităţile (III.6.3) urmează din teoremele III.6.4 punctul d) şi III.6.5 punctul d). ■

O altă caracterizare a mulţimii C_L este dată în

Teorema III.6.10. *Are loc*

$$C_L = \{z|z\in L_1,\ \ \exists(x, y)\in X(L)\ \ \text{cu}\ x\geqslant z\geqslant y\}.$$

Demonstraţie. Fie $z\in C_L$. Alegînd $y = \mathrm{m}(z)$ *şi* $x = \mathbf{M}(\mathrm{m}(z))$ avem $x\geqslant z\geqslant y$ şi $(x, y)\in X(L)$, deoarece $\mathrm{m}(x) = \mathrm{m}(\mathbf{M}(\mathrm{m}(z))) = \mathrm{m}(z) = y$ şi $\mathbf{M}(y) = \mathbf{M}(\mathrm{m}(z)) = x$.

Reciproc, dacă $(x, y)\in X(L)$ şi $x\geqslant z\geqslant y$ atunci $\mathbf{M}(x)\geqslant \mathbf{M}(z)\geqslant \mathbf{M}(y) = x\geqslant z$, de unde $\mathbf{M}(z)\geqslant z$, adică $z\in C_L$ (vezi teorema III. 6.9) ■

Teorema III.6.11. *Fie $L \subseteq L_1 \times L_1$ o algebră de asociere. Există un $k_1 \in N$ astfel ca pentru orice $x \in L_1$ și $k \geqslant k_1$ să avem*

$$\min \{y \mid y \in C_L, y \geqslant x\} = \bigvee_{j=0}^{k} \mathbf{m}^j(x), \tag{III.6.4}$$

unde $\mathbf{m}^0(x) = x$ *și* $\mathbf{m}^j(x) = \mathbf{m}(\mathbf{m}^{j-1}(x))$, $\forall j \geqslant 1$.

Demonstrație. Fie $y_h = \bigvee_{j=0}^{h} \mathbf{m}^j(x)$. Avem $y_{h+1} = x \vee \bigvee_{j=1}^{h+1} \mathbf{m}^j(x) = x \vee \mathbf{m}(y_h) =$ $= y_h \vee \mathbf{m}(y_h)$, prin urmare $y_0 \leqslant y_1 \leqslant \ldots \leqslant y_h$, și cum L_1 este o latice finită există $k \in N$ astfel ca $y_k = y_{k+1}$ de unde $y_{k+1} = y_k = y_k \vee \mathbf{m}(y_k)$, adică $\mathbf{m}(y_k) \leqslant y_k$ prin urmare $y_k \in C_L$ (vezi teorema III.6.9).

Fie acum $y' \geqslant x$, $y' \in C_L$, deci $y' \geqslant \mathbf{m}(y')$. Utilizînd izotonia aplicației $\mathbf{m}$ avem:

$$y' \geqslant \mathbf{m}^j(y') \geqslant \mathbf{m}^j(x), \quad j = \overline{0, k},$$

deci

$$y' \geqslant \bigvee_{j=0}^{k} \mathbf{m}^j(x) = y_k,$$

și astfel y_k este cel mai mic element al lui C_L, mai mare decît x.

Mai rămîne de arătat că există $k_1 \in N$ astfel ca pentru $k \geqslant k_1$, *oricare ar fi* $x \in L$, să aibă loc formula (III.6.4).

Este suficient să observăm că oricare ar fi $n \in N$, $y_{h+n} = y_h \vee \mathbf{m}(y_h) \vee \ldots$ $\ldots \vee \mathbf{m}^n(y_n)$, de unde, dacă $y_{k+1} = y_k \vee \mathbf{m}(y_k) = y_k$ obținem $\mathbf{m}(y_k) \leqslant y_k$ și $\mathbf{m}^n(y_k) \leqslant y_k$, ceea ce implică $y_{k+n} = y_k$, $\bigwedge n \in N$.

Astfel putem alege k_1 ca maximul numerelor k corespunzătoare elementelor $x \in L_1$. ■

Teorema III.6.12. *Fie $L \subseteq L_1 \times L_1$ o algebră de asociere. Există un $k_1 \in N$ astfel ca pentru orice $x \in L_1$ și $k \geqslant k_1$ să avem*

$$\max \{y \mid y \in C_L, y \leqslant x\} = \bigwedge_{j=0}^{k} \mathbf{M}^j(x).$$

Demonstrație. Se procedează similar ca în teorema III.6.11. ■

Teorema III.6.13. *Fie $L \subseteq L_1 \times L_1$. Atunci are loc:*

a) $\mathbf{m}^k(x) = 0$ *dacă și numai dacă* $x \leqslant \mathbf{M}^k(0)$;

b) $\mathbf{M}^k(x) = 1$ *dacă și numai dacă* $x \geqslant \mathbf{m}^k(1)$.

Demonstrație. a) Dacă $\mathbf{m}^k(x) = 0$, atunci cum $\mathbf{M}(\mathbf{m}(z)) \geqslant z$ obținem: $\mathbf{M}^k(0) = \mathbf{M}^k(\mathbf{m}^k(x)) = \mathbf{M}^{k-1}(\mathbf{M}(\mathbf{m}(\mathbf{m}^{k-1}(x)))) \geqslant \mathbf{M}^{k-1}(\mathbf{m}^{k-1}(x)) \geqslant \ldots \geqslant \mathbf{M}(\mathbf{m}(x)) \geqslant x$.

Dacă $x \leqslant \mathbf{M}^k(0)$ atunci deoarece $\mathbf{m}(\mathbf{M}(y)) \leqslant y$ obținem $\mathbf{m}^k(x) \leqslant \mathbf{m}^k(\mathbf{M}^k(0)) = \mathbf{m}^{k-1}(\mathbf{m}(\mathbf{M}(\mathbf{M}^{k-1}(0)))) \leqslant \mathbf{m}^{k-1}(\mathbf{M}^{k-1}(0)) \leqslant \ldots \leqslant 0$ și cum $\mathbf{m}^k(x) \geqslant 0$ rezultă $\mathbf{m}^k(x) = 0$.

b) Se procedează similar ca la punctul a). ■

Consecința III.6.3. Fie $L \subseteq L_1 \times L_1$. Atunci $\mathbf{M}^k(0) = 1$ dacă și numai dacă $0 = \mathbf{m}^k(1)$.

Rezultatele precedente, obținute în cadrul teoriei laticilor pot fi interpretate pentru automate deterministe. Astfel pentru automatul A, L_1 este laticea echivalentelor pe S, $L \subseteq L_1 \times L_1$ este relația de asociere, $L = \alpha$, iar C_L este mulțimea congruențelor pe automatul A.

Cu aceste precizări putem lua în teoremele III.6.11, 12 $k_1 = n - 1$, dacă $|S| = n$, deoarece o echivalență pe S nu poate fi rafinată decît de cel mult n ori.

Utilizînd teorema III.6.12 obținem:

Teorema III.6.14. *Avem*

$$\max\{\sigma \mid \sigma \in C_A, \quad \sigma \leqslant \rho_1\} = \rho,$$

unde $\rho_1 = \bigcap_{i \in I} \ker g_i$, ρ *este relația de echivalență dată în definiția* II.5.1, *iar* C_A *este mulțimea congruențelor pe* A.

Demonstrație. Conform teoremei III.6.12 avem de arătat că $\rho = \bigwedge_{j=0}^{n-1} \mathbf{M}^j(\rho_1)$. Să observăm că $\mathbf{M}(\rho_k) = \rho_{k+1}$, unde $\rho_k = \bigcap_{p \in I^{*k}} \ker g_p$ (vezi definiția II.5.2). Intr-adevăr avem $(\rho_{k+1}, \rho_k) \in \alpha$, deoarece dacă $(s', s'') \in \rho_{k+1}$ rezultă $(f(s', i), f(s'', i)) \in \rho_k$, de unde $\rho_{k+1} \leqslant \mathbf{M}(\rho_k)$. Pe de altă parte, dacă $(s', s'') \in \mathbf{M}(\rho_k)$ atunci $(f(s', i), f(s'', i)) \in \rho_k$, de unde $(s', s'') \in \rho_{k+1}$ deci $\mathbf{M}(\rho_k) = \rho_{k+1}$. Apoi $\rho_{k+1} = \mathbf{M}(\rho_k) = \mathbf{M}(\mathbf{M}(\rho_{k-1})) = \ldots = \mathbf{M}^k(\rho_1)$.

Cum $\rho_1 \geqslant \rho_2 \geqslant \ldots \geqslant \rho_{n-1} = \rho_n = \rho$ obținem

$$\rho = \bigwedge_{j=1}^{n} \rho_j = \bigwedge_{j=0}^{n-1} \mathbf{M}^j(\rho_1). \blacksquare$$

Fucționarea dispozitivelor de automatizare impune deseori restricții de aplicare a unor simboli de intrare atunci cînd dispozitivele se află în anumite stări. Este naturală de aceea introducerea noțiunii de automate cu restricție.

Definiția III.6.7. *Un automat cu restricție* este un 6-uplu $A = [I, r, S, O, f, g]$ unde $r \subseteq S \times I$ este *relația de restricție* $f: r^c \to S$, $g: r^c \to O$, iar I, S, O au semnificațiile cunoscute.

Relația $r^c \subseteq S \times I$ (complementara relației de restricție) se numește *relația de admisibilitate* a automatului.

Un *semiautomat cu restricție* este un 4-uplu $A = [I, r, S, f]$, unde I, r, S, f au semnificațiile de mai sus.

Observația III.6.7. Orice automat poate fi interpretat ca automat cu restricție punînd $r^c = S \times I$, $(r = \emptyset)$.

Putem astfel extinde conceptul de echivalențe asociate pe un automat, pentru automatele cu restricție.

Fie $A = [I, r, S, O, f, g]$ un automat finit cu restricție.

Definiția III.6.8. Echivalențele $\sigma_1, \sigma_2 \in \mathrm{Eq}(S)$ sînt *echivalențe slab-asociate*, $(\sigma_1, \sigma_2) \in \beta$, dacă din $(s', s'') \in \sigma_1$, $(s', i) \in r^o$, $(s'', i) \in r^o$ rezultă $(f(s', i), f(s'', i)) \in \sigma_2$. Vom numi $\beta \subseteq \mathrm{Eq}(S) \times \mathrm{Eq}(S)$ *relația de asociere slabă a echivalențelor.*

Definiția III.6.9. *O congruență pe un automat cu restricție* este o echivalență $\sigma \in \mathrm{Eq}(S)$ pentru care $(\sigma, \sigma) \in \beta$.

Observația III.6.8. Oricare ar fi $\sigma \in \mathrm{Eq}(S)$ avem $(\iota_S, \sigma) \in \beta$ și $(\sigma, \omega_S) \in \beta$.

Teorema III.6.15. *Relația de asociere slabă este o congruență pe semilaticea* $(\mathrm{Eq}(S) \times \mathrm{Eq}(S), \wedge)$ *adică, dacă* $(\sigma_1, \sigma_2) \in \beta$, $(\sigma_1', \sigma_2') \in \beta$ *atunci* $(\sigma_1 \wedge \sigma_1', \sigma_2 \wedge \sigma_2') \in \beta$.

Demonstrație. Fie $(s_1, s_2) \in \sigma_1 \wedge \sigma_1'$. Atunci $(s_1, s_2) \in \sigma_1$ și $(s_1, s_2) \in \sigma_1'$. Dacă (s_1, i), $(s_2, i) \in r^c$ atunci $(f(s_1, i), (fs_2, i)) \in \sigma_2$ și $(f(s_1, i), (f(s_2, i)) \in \sigma_2'$, adică $(f(s_1, i), f(s_2, i)) \in \sigma_2 \wedge \sigma_2'$. ■

Observația III.6.9. In general, pentru relațiile de asociere slabă nu are loc proprietatea analogă cu cea din teorema III.6.15 referitoare la reuniune. Are loc proprietate mai slabă și anume:

Teorema III.6.16. *Dacă* $(\sigma_1, \sigma_2) \in \beta$, *atunci* $(\sigma_1, \sigma_2 \vee \sigma) \in \beta$, $\forall \sigma \in \mathrm{Eq}(S)$.

Demonstrație. Rezultă imediat, deoarece $\sigma_2 \leqslant \sigma_2 \vee \sigma$. ■

Definiția III. 6.10. Fie L_1, L_2 două latici finite. O mulțime $L \subseteq L_1 \times L_2$ este o *algebră de asociere slabă* dacă $\forall x \in L_1$ și $\forall y \in L_2$ avem:

a) dacă $(x, y) \in L$ și $y' \in L_2$ atunci $(x, y \vee y') \in L$;

b) dacă $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in L$ atunci $(x_1 \wedge x_2, y_1 \wedge y_2) \in L$;

c) $(x, 1_2) \in L$, și $(0_1, y) \in L$ unde 1_2, și 0_1 reprezintă ultimul element din L_2 și primul element din L_1 respectiv.

Definiția III. 6.11. Fie $L \subseteq L_1 \times L_2$ o algebră de asociere slabă. *Operatorul slab al lui Hartmanis* și *Stearns* $\overline{\mathfrak{m}}: L_1 \to L_2$ este dat prin

$$\overline{\mathfrak{m}}(x) = \wedge \{y_j \mid (x, y_j) \in L\}.$$

Teorema. III.6.17. *Fie L o algebră de asociere slabă. Atunci au loc următoarele proprietăți:*

a) $(x, \overline{\mathfrak{m}}(x)) \in L$;

b) $x_1 \geqslant x_2$ *implică* $\overline{\mathfrak{m}}(x_1) \geqslant \overline{\mathfrak{m}}(x_2)$, *adică* $\overline{\mathfrak{m}}$ *este o aplicație izotonă;*

c) $\overline{\mathfrak{m}}(x_1 \vee x_2) \geqslant \overline{\mathfrak{m}}(x_1) \vee \overline{\mathfrak{m}}(x_2)$;

d) $\overline{\mathfrak{m}}(x_1 \wedge x_2) \leqslant \overline{\mathfrak{m}}(x_1) \wedge \overline{\mathfrak{m}}(x_2)$;

e) $y \geqslant \overline{\mathfrak{m}}(x)$ *dacă și numai dacă* $(x, y) \in L$.

Demonstrație. Se procedează analog ca în teorema III.6.5. Remarcăm aici că punctul c) dă o proprietate mai slabă decît punctul b) din teorema citată. ■

§ III.7. ALTE ALGEBRE DE ASOCIERE ATAŞATE UNUI AUTOMAT

Fie $A = [I, S, O, f, g]$ un automat determinist finit.

Definiţia III.7.1. Fie $\xi \in \mathrm{Eq}(I)$ şi $\sigma \in \mathrm{Eq}(S)$. Echivalenţele ξ şi σ sînt asociate $I-S$ dacă:

$$(i_1, i_2) \in \xi \to (f(s, i_1), f(s, i_2)) \in \sigma, \quad \forall s \in S.$$

Vom nota relaţia de asociere $I-S$ cu α_{IS}

Definiţia III.7.2. Fie $\sigma \in \mathrm{Eq}(S)$ şi $\eta \in \mathrm{Eq}(O)$. Echivalenţele σ şi η sînt asociate $S-O$ dacă:

$$(s_1, s_2) \in \sigma \to (g(s_1, i), g(s_2, i)) \in \eta, \forall i \in I.$$

Vom nota relaţia de asociere $S - O$ prin α_{SO}.

Definiţia III.7.3. Fie $\xi \in \mathrm{Eq}(I)$ şi $\eta \in \mathrm{Eq}(O)$. Echivalenţele ξ şi η sînt asociate $I-O$ dacă

$$(i_1, i_2) \in \xi \to (g(s, i_1), g(s, i_2)) \in \eta, \forall s \in S.$$

Vom nota relaţia de asociere $I-O$ cu α_{IO}.

Observaţia III.7.1. Relaţia de asociere din definiţia III.6.1. va fi notată şi cu α_{SS}.

Observaţia III.7.2. În cazul automatelor Moore cu întîrziere (vezi definiţia II.3.1) avem $\alpha_{IO} = \mathrm{Eq}(I) \times \mathrm{Eq}(O)$.

Teorema III.7.1. *α_{SS}, α_{IS}, α_{SO}, α_{IO} sînt algebre de asociere.*

Demonstraţie. Pentru α_{SS} afirmaţia rezultă din observaţia III.6.6. Să arătăm că α_{IS} este o algebră de asociere. Fie $(\xi_1, \sigma_1), (\xi_2, \sigma_2) \in \alpha_{IS}$. Atunci $(\xi_1 \wedge \xi_2, \sigma_1 \wedge \sigma_2), (\xi_1 \vee \xi_2, \sigma_1 \vee \sigma_2) \in \alpha_{IS}$. Într-adevăr, dacă $(i_1, i_2) \in \xi_1 \wedge \xi_2$ atunci $(f(s, i_1), f(s, i_2)) \in \sigma_1 \wedge \sigma_2$, iar dacă $(i_1, i_2) \in \xi_1 \vee \xi_2$ există un şir de elemente din I: $i_1', i_2', \ldots, i_n'$ astfel ca $(i_1, i_1') \in \xi_1$, $(i_1', i_2') \in \xi_2$, ..., $(i_n', i_2) \in \xi_1$. Atunci $(f(s, i_1), f(s, i_1')) \in \sigma_1$, $(f(s_1, i_1'), f(s, i_2')) \in \sigma_2$, ..., $(f(s, i_n'), f(s, i_2)) \in \sigma_1$, $\forall s \in S$, deci $(f(s, i_1), f(s, i_2)) \in \sigma_1 \vee \sigma_2$, prin urmare α_{IS} este o sublatice a laticii $\mathrm{Eq}(I) \times \mathrm{Eq}(S)$. Pe de altă parte $(\xi, \omega_S) \in \alpha_{IS}$, $(\iota_I, \sigma) \in \alpha_{IS}$, deci α_{IS} este o algebră de asociere.

Analog se procedează pentru α_{SO} şi α_{IO}. ■

Observaţia III.7.3. Introducînd operatorii $\mathbf{M}_{SS}$, $\mathbf{m}_{SS}$; $\mathbf{M}_{IS}$, $\mathbf{m}_{IS}$; $\mathbf{M}_{SO}$, $\mathbf{m}_{SO}$; $\mathbf{M}_{IO}$, $\mathbf{m}_{IO}$ în algebrele de asociere α_{SS}, α_{IS}, α_{SO} şi α_{IO} respectiv (conform definiţiei III.6.4) teoremele III.6.4—8 îşi păstrează valabilitatea.

Teorema III.7.2. *Dacă $\sigma_2 = \mathbf{m}_{SS}(\sigma_1)$ atunci:*

$$\sigma_2 = \vee \{\mathbf{m}_{SS}(\sigma_{s_1 s_2}) \mid \sigma_{s_1 s_2} \leqslant \sigma_1\},$$

unde $\sigma_{s_1 s_2}$ este echivalenţa corespunzătoare partiţiei $\{\{s_1, s_2\}, \{s_3\}, \{s_4\}, \ldots, \{s_n\}\}$ pe mulţimea $S = \{s_1, s_2, \ldots, s_n\}$.

Demonstrație. Avem $\sigma_1 = \bigvee\{\sigma_{s_1s_2} \mid \sigma_{s_1s_2} \leqslant \sigma_1\}$, deoarece din $\sigma_{s_1s_2} \leqslant \sigma_1$ rezultă $\bigvee\{\sigma_{s_1s_2} \mid \sigma_{s_1s_2} \leqslant \sigma_1\} \leqslant \sigma_1$, iar pe de altă parte dacă $(s', s'') \in \sigma_1$ atunci avem $\sigma_{s's''} \leqslant \sigma_1$ și deci $(s', s'') \in \bigvee\{\sigma_{s_1s_2} \mid \sigma_{s_1s_2} \leqslant \sigma_1\}$, adică $\sigma_1 \geqslant \bigvee\{\sigma_{s_1s_2} \mid \sigma_{s_1s_2} \leqslant \sigma_1\}$.

Deoarece

$\sigma_2 = \mathbf{m}_{SS}(\sigma_1)$ avem $\sigma_2 = \mathbf{m}_{SS}(\bigvee\{\sigma_{s_1s_2} \mid \sigma_{s_1s_2} \leqslant \sigma_1\}) = \bigvee\{\mathbf{m}_{SS}(\sigma_{s_1s_2}) \mid \sigma_{s_1s_2} \leqslant \sigma_1\}$. ■

Consecința III.7.1. Dacă $(\sigma_1, \sigma_2) \in X(\alpha_{SS})$ atunci:

$$\mathbf{m}_{SS}(\sigma_1) = \sigma_2 = \bigvee\{\mathbf{m}_{SS}(\sigma_{s_1s_2}) \mid \sigma_{s_1s_2} \leqslant \sigma_1\}. \tag{III.7.1}$$

Consecința III.7.2. Echivalențele $\{\mathbf{m}_{SS}(\sigma_{s_1s_2}) \mid (s_1, s_2) \in S \times S\}$ constituie un sistem de generatori pentru semilaticea $\{\mathbf{m}_{SS}(\mathrm{Eq}(S)), \bigvee\}$.

Observația III. 7.4. Fie $(\sigma_1, \sigma_2) \in X(\sigma_{SS})$. Atunci $\sigma_2 = \mathbf{m}_{SS}(\sigma_1)$ și $(\sigma_1, \sigma_2) = (\mathbf{M}_{SS}(\mathbf{m}_{SS}(\sigma_1)), \mathbf{m}_{SS}(\sigma_1))$. Astfel oricărui $\sigma \in \mathbf{m}_{SS}(\mathrm{Eq}(S))$ îi corespunde în mod unic un element $(\mathbf{M}_{SS}(\sigma), \sigma) \in X(\alpha_{SS})$. Ținînd seama de consecința III. 7.1 putem obține toate elementele lui $X(\alpha_{SS})$ plecînd de la reuniuni de forma $\bigvee\{\mathbf{m}_{SS}(\sigma_{s_1s_2}) \mid \sigma_{s_1s_2} \leqslant \sigma_1\}$.

Observația III.7.5. Teorema III.7.2 și consecințele ei își păstrează valabilitatea (făcînd schimbările care se impun) și pentru operatorii $\mathbf{M}_{IS}$, $\mathbf{m}_{IS}$, $\mathbf{M}_{SO}$, $\mathbf{m}_{SO}$, $\mathbf{M}_{IO}$, $\mathbf{m}_{IO}$.

Vom ilustra rezultatele de mai sus pe:

Exemplul III.7.1 [Hartmanis și Stearns [9]]. Fie automatul Moore cu întîrziere $A = [\{i_1, i_2, i_3, i_4\}, \{s_1, s_2, s_3, s_4, s_5\}, \{0, 1\}, f, g]$, unde funcțiile f și g sînt date în tabelul:

f	s_1	s_2	s_3	s_4	s_5	g	s_1	s_2	s_3	s_4	s_5
i_1	s_3	s_1	s_3	s_5	s_5	i_1	0	0	0	0	1
i_2	s_1	s_5	s_4	s_1	s_4	i_2	0	0	0	0	1
i_3	s_4	s_4	s_3	s_4	s_3	i_3	0	0	0	0	1
i_4	s_2	s_2	s_5	s_2	s_5	i_4	0	0	0	0	1

Vom căuta mulțimea perechilor extremale $X(\alpha_{SS})$.

Se constată imediat că:

$$S/\mathbf{m}_{SS}(\sigma_{s_1s_2}) = \{\{s_1, s_3, s_5\}, \{s_2\}, \{s_4\}\} = S/\sigma_1'$$

$$S/\mathbf{m}_{SS}(\sigma_{s_1s_3}) = S/\mathbf{m}_{SS}(\sigma_{s_4s_5}) = \{\{s_1, s_3, s_4\}, \{s_2, s_5\}\} = S/\sigma_2'$$

$$S/\mathbf{m}_{SS}(\sigma_{s_1s_4}) = S/\mathbf{m}_{SS}(\sigma_{s_2s_5}) = \{\{s_1\}, \{s_2\}, \{s_3, s_5\}, \{s_4\}\} = S/\sigma_3'$$

$$S/\mathbf{m}_{SS}(\sigma_{s_1s_5}) = S/\mathbf{m}_{SS}(\sigma_{s_2s_5}) = S/\mathbf{m}_{SS}(\sigma_{s_3s_5}) = S/\mathbf{m}_{SS}(\sigma_{s_3s_4}) =$$
$$= \{\{s_1, s_2, s_3, s_4, s_5\}\} = S/\omega_S$$

$$S/\mathbf{m}_{SS}(\sigma_{s_2s_4}) = \{\{s_1, s_5\}, \{s_2\}, \{s_3\}, \{s_4\}\} = S/\sigma_4'.$$

Avem

$$\sigma_1' \vee \sigma_2' = \omega_S,\ \sigma_1' \vee \sigma_3' = \sigma_1',\ \sigma_1' \vee \sigma_4' = \sigma_1',\ \sigma_2' \vee \sigma_3' = \omega_S,\ \sigma_2' \vee \sigma_4' =$$

$$= \omega_S,\ \sigma_3' \vee \sigma_4' = \sigma_1',\ \sigma_j' \vee \omega_S = \omega_S,\ j = \overline{1, 4},$$

Deci mulțimea de echivalențe $E = \{\sigma_1', \sigma_2', \sigma_3', \sigma_4', \omega_S\}$ este închisă la reuniune și $\mathfrak{m}(\mathrm{Eq}(S)) = E$.

Calcularea lui $\mathbf{M}_{SS}(\sigma_j')$, $j = \overline{1, 4}$, $\mathbf{M}_{SS}(\iota_S)$, $\mathbf{M}_{SS}(\omega_S)$ prin utilizarea directă a tabelului ce dă funcțiile f și g este foarte greoaie. De aceea vom prezenta un procedeu special.

În baza teoremei III.6.5 punctul d) și a definiției III.6.2 putem scrie

$$\mathbf{M}_{SS}(\sigma) = \vee\{\sigma' \mid (\sigma', \sigma) \in \alpha_{SS}\} = \vee\{\sigma' \mid \mathbf{m}_{SS}(\sigma') \leqslant \sigma\} \geqslant$$

$$\geqslant \vee\{\sigma_{s_1 s_2} \mid \mathbf{m}_{SS}(\sigma_{s_1 s_2}) \leqslant \sigma\}.$$

Pe de altă parte $\sigma' = \vee\{\sigma_{s's''} \mid \sigma_{s's''} \leqslant \sigma'\}$ și dacă $\mathbf{m}_{SS}(\sigma') \leqslant \sigma$ obținem $\mathbf{m}_{SS}(\sigma_{s's''}) \leqslant \sigma$ pentru toți $\sigma_{s's''} \leqslant \sigma'$. Ca atare $\vee\{\sigma' \mid \mathbf{m}_{SS}(\sigma') \leqslant \sigma\} \leqslant \vee\{\sigma_{s_1 s_2} \mid \mathbf{m}_{SS}(\sigma_{s_1 s_2}) \leqslant \sigma\}$. Astfel găsim

$$\mathbf{M}_{SS}(\sigma) = \vee\{\sigma_{s_1 s_2} \mid \mathbf{m}_{SS}(\sigma_{s_1 s_2}) \leqslant \sigma\},$$

formulă pe care o vom folosi pentru calculul lui $\mathbf{M}_{SS}(\sigma_j')$, $j = \overline{1, 4}$, $\mathbf{M}_{SS}(\omega_S)$, $\mathbf{M}_{SS}(\iota_S)$. Avem:

$$\mathbf{M}_{SS}(c_1') = \sigma_{s_1 s_2} \vee \sigma_{s_1 s_4} \vee \sigma_{s_3 s_5} \vee \sigma_{s_3 s_4} = \sigma_1,$$

de unde

$$S/\sigma_1 = \{\{s_1, s_2, s_4\}, \{s_3, s_5\}\}.$$

Apoi

$$\mathbf{M}_{SS}(\sigma_2') = \sigma_{s_1 s_3} \vee \sigma_{s_4 s_5} = \sigma_2,$$

de unde:

$$S/\sigma_2 = \{\{s_1, s_3\}, \{s_2\}, \{s_4, s_5\}\},$$

iar

$$\mathbf{M}_{SS}(\sigma_3') = \sigma_{s_1 s_4} \vee \sigma_{s_3 s_5} = \sigma_3,$$

și

$$S/\sigma_3 = \{\{s_1, s_4\}, \{s_3, s_5\}, \{s_2\}\}.$$

În sfîrșit

$$\mathbf{M}_{SS}(\sigma_4') = \sigma_{s_3 s_4} = \sigma_4$$

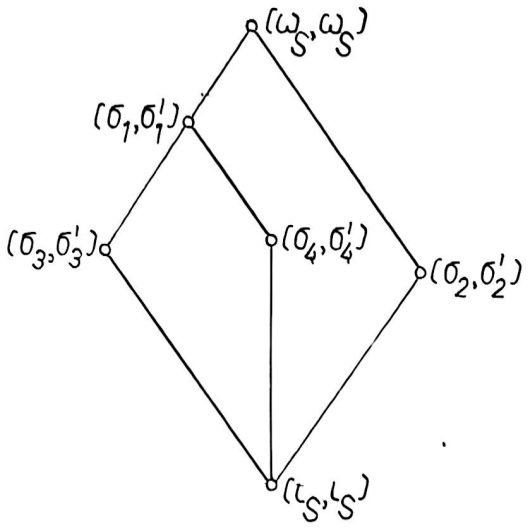


Fig.III.7.1

și

$$S/\sigma_4 = \{\{s_1\}, \{s_2, s_4\}, \{s_3\}, \{s_5\}\}.$$

Mai avem și

$$\mathbf{M}_{SS}(\omega_S) = \omega_S \text{ și } \mathbf{M}_{SS}(\iota_S) = \iota_S.$$

Obținem astfel sublaticea perechilor extremale $X(\alpha_{SS})$, care este alcătuită din elementele (ι_S, ι_S), (σ_1, σ_1'), (σ_2, σ_2'), (σ_3, σ_3') (σ_4, σ_4') (ω_S, ω_S) a cărei diagramă este dată în figura III.7.1.

Exemplul III.7.2. Fie automatul $A = [\{i_1, i_2, i_3\}, \{s_1, s_2, s_3, s_4\}, \{0, 1, 2\}, f, g]$, unde funcțiile f și g sînt date în tabelul:

f	s_1	s_2	s_3	s_4	g	s_1	s_2	s_3	s_4
i_1	s_1	s_3	s_2	s_4	i_1	0	2	1	2
i_2	s_2	s_4	s_1	s_3	i_2	2	0	1	1
i_3	s_3	s_4	s_1	s_2	i_3	1	2	0	2

Vom căuta mulțimile perechilor extremale $X(\alpha_{SS})$, $X(\alpha_{IS})$, $X(\alpha_{SO})$, $X(\alpha_{IO})$ prin același procedeu folosit în exemplul precedent.

Găsim $X(\alpha_{SS}) = \{(\iota_S, \iota_S), (\sigma_1, \sigma_2), (\sigma_3, \sigma_3), (\sigma_4, \sigma_5)\ (\omega_S, \omega_S)\}$, unde:

$$S/\sigma_1 = \{\{s_1, s_3\}, \{s_2\}, \{s_4\}\},$$

$$S/\sigma_2 = \{\{s_1, s_2, s_3\}, \{s_4\}\},$$

$$S/\sigma_3 = \{\{s_1, s_4\}, \{s_2, s_3\}\},$$

$$S/\sigma_4 = \{\{s_1\}, \{s_2, s_4\}, \{s_3\}\},$$

$$S/\sigma_5 = \{\{s_1\}, \{s_2, s_3, s_4\}\}.$$

Analog:

$$X(\alpha_{IS}) = \{(\iota_I, \iota_S), (\xi_1, \sigma_6), (\xi_2, \sigma_7), (\omega_I, \omega_S)\},$$

unde

$$I/\xi_1 = \{\{i_1, i_2\}, \{i_3\}\}, \qquad I/\xi_2 = \{\{i_1\}, \{i_2, i_3\}\},$$

$$S/\sigma_6 = \{\{s_1, s_2\}, \{s_3, s_4\}\}, \qquad S/\sigma_7 = \{\{s_1\}, \{s_2, s_3\}, \{s_4\}\}.$$

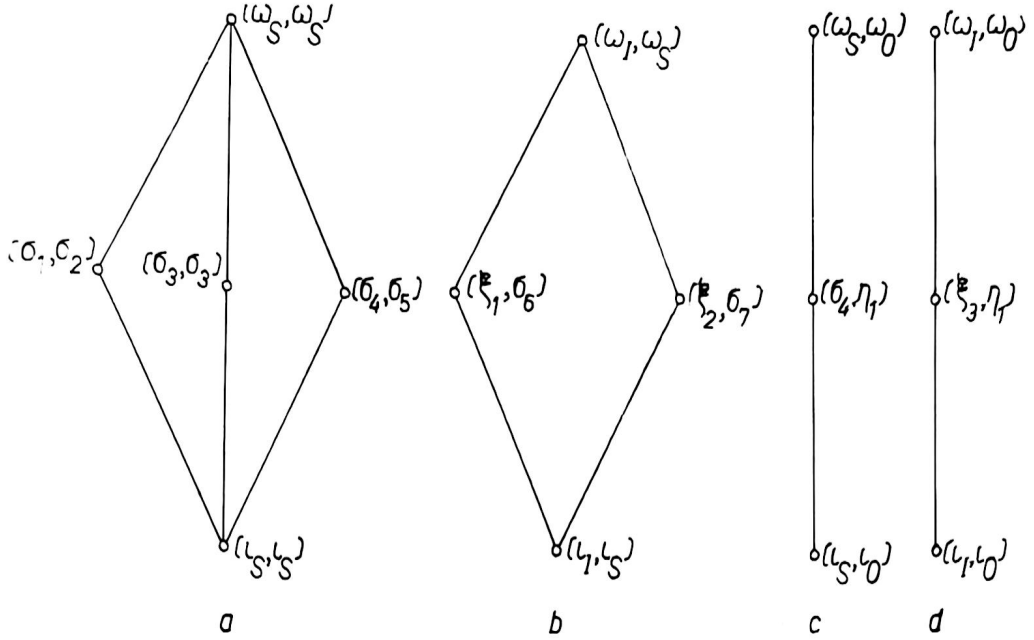


Fig. III.7.2 a)—d)

Apoi:

$$X(\alpha_{SO}) = \{(\iota_S, \iota_O), (\sigma_4, \eta_1), (\omega_S, \omega_O)\},$$

unde:

$$O/\eta_1 = \{\{0, 1\}, \{2\}\}.$$

În sfîrșit:

$$X(\alpha_{IO}) = \{(\iota_I, \iota_O), (\xi_3, \eta_1), (\omega_I, \omega_O)\},$$

unde

$$I/\xi_3 = \{\{i_1, i_3\}, \{i_2\}\}.$$

Aceste latici sînt reprezentate în fig. III.7.2 a—d.

Conceptele de algebre de asociere pot fi extinse și pentru asocierea slabă. Fie $A = [I, r, S, O, f, g]$ un automat cu restricție.

Definiția III.7.4. *Fie* $\xi \in \mathrm{Eq}(I)$ și $\sigma \in \mathrm{Eq}(S)$. Echivalențele ξ și σ sînt asociate $I—S$, $(\xi, \sigma) \in \beta_{IS}$ dacă $(i_1, i_2) \in \xi$ și $(s, i_1) \in r^c$, $(s, i_2) \in r^c$ atunci $(f(s, i_1), f(s, i_2)) \in \sigma$.

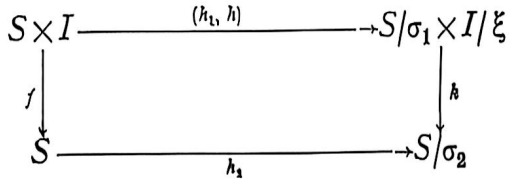
Dacă $\eta \in \mathrm{Eq}(O)$, echivalențele σ și η sînt asociate $S - O$, $(\sigma, \eta) \in \beta_{SO}$ dacă din $(s_1, s_2) \in \sigma$, $(s_1, i) \in r^c$, $(s_2, i) \in r^c$ avem $(g(s_1, i), g(s_2, i)) \in \eta$.

În sfîrșit, echivalențele ξ și η sînt asociate $I - O$, $(\xi, \eta) \in \beta_{IO}$ dacă din $(i_1, i_2) \in \xi$ și $(s, i_1) \in r^c$, $(s, i_2) \in r^c$ obținem $(g(s, i_1), g(s, i_2)) \in \eta$, $\forall s \in S$.

§ III. 8. CODIFICAREA AUTOMATELOR

Vom folosi algebrele de asociere în studiul codificării automatelor, procedeu care servește la realizarea fizică optimală a dispozitivelor care sînt descrise în mod abstract de automate.

Teorema III.8.1. *Fie* $A = [I, S, O, f, g]$ *și* $\sigma_1, \sigma_2 \in \mathrm{Eq}(S)$, $\xi \in \mathrm{Eq}(I)$; *atunci avem* $\sigma_1 \leqslant \mathbf{M}_{SS}(\sigma_2)$, $\xi \leqslant \mathbf{M}_{IS}(\sigma_2)$ *dacă și numai dacă există o aplicație* $k : S/\sigma_1 \times I/\xi \to S/\sigma_2$ *astfel ca diagrama:*



să fie comutativă, unde $h_j(s) = [s]_{\sigma_j}$, $j = 1, 2$ *și* $h(i) = [i]_\xi$. *Aplicația* k *este unică.*

Demonstrație. Să presupunem că există o aplicație k cu proprietățile din enunț, adică

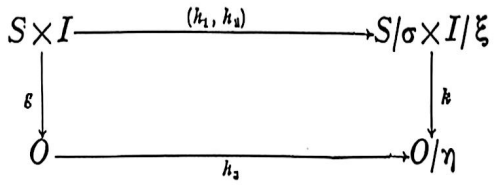
$$[f(s, i)]_{\sigma_2} = k([s]_{\sigma_1}, [i]_\xi).$$

Dacă $(s_1, s_2) \in \sigma_1$ atunci $(f(s_1, i), f(s_2, i)) \in \sigma_2$, $\forall i \in I$, deoarece $[f(s_1, i)]_{\sigma_2} = k([s_1]_{\sigma_1}, [i]_\xi) = k([s_2]_{\sigma_1}, [i]_\xi) = [f(s_2, i)]_{\sigma_2}$. Astfel $(\sigma_1, \alpha_2) \in \alpha_{SS}$ și rezultă $\sigma_1 \leqslant \mathbf{M}_{SS}(\sigma_2)$.

Dacă $(i_1, i_2) \in \xi$ atunci $[f(s, i_1)]_{\sigma_2} = k([s]_{\sigma_1}, [i_1]_\xi) = k([s]_{\sigma_1}, [i_2]_\xi) = [f(s, i_2)_{\sigma_2}]$, adică $(\xi, \sigma_2) \in \alpha_{IS}$, de unde $\xi \leqslant \mathbf{M}_{SS}(\sigma_2)$.

Pe de altă parte, dacă $\sigma_1 \leqslant \mathbf{M}_{SS}(\sigma_2)$ și $\xi \leqslant \mathbf{M}_{IS}(\sigma_2)$ atunci $(\sigma_1, \sigma_2) \in \alpha_{SS}$ și $(\xi, \sigma_2) \in \alpha_{IS}$. Vom defini aplicația k: $S/\sigma_1 \times I/\xi \to S/\sigma_2$ prin $k([s]_{\sigma 1}, [i]_\xi) = [f(s_1, i)]_{\sigma_2}$, care face diagrama comutativă. Aplicația k este unică prin însuși modul ei de definire. ■

Teorema III.8.2. *Fie* $A = [I, S, O, f, g]$ *și* $\xi \in \mathrm{Eq}(I)$, $\sigma \in \mathrm{Eq}(S)$, $\eta \in \mathrm{Eq}(O)$. Avem $\sigma \leqslant \mathbf{M}_{SO}(\eta)$ și $\xi \leqslant \mathbf{M}_{IO}(\eta)$ *dacă și numai dacă există o aplicație* k: $S/\sigma \times I/\xi \to O/\eta$ *astfel ca diagrama*



să fie comutativă, unde $h_1(s) = [s]_\sigma$, $h_2(i) = [i]_\xi$, $h_3(o) = [o]_\eta$. *Aplicația* k *este unică.*

Demonstrație. Să presupunem că există o aplicație k astfel încît $k([s]_\sigma, [i]_\xi) = [g(s, i)]_\eta$. Dacă $(s_1, s_2) \in \sigma$ atunci $[g(s_1, i)]_\eta = k([s_1]_\sigma, [i]_\xi) = k([s_2]_\sigma, [i]_\xi) = [g(s_2, i)]_\eta$, deci $(\sigma, \eta) \in \alpha_{SO}$ de unde $\sigma \leqslant \mathbf{M}_{SO}(\eta)$.

Apoi, dacă $(i_1, i_2) \in \xi$, $[g(s, i_1)]_\eta = k([s]_\sigma, [i_1]_\xi) = k([s]_\sigma, [i_2]_\xi) = [g(s, i_2)]_\eta$, deci $(\xi, \eta) \in \alpha_{IO}$, de unde $\xi \leqslant \mathbf{M}_{IO}(\eta)$.

Reciproc, fie $\sigma \leqslant \mathbf{M}_{SO}(\eta)$ și $\xi \leqslant \mathbf{M}_{IO}(\eta)$. Atunci $(\sigma, \eta) \in \alpha_{SO}$, $(\xi, \eta) \in \alpha_{IO}$. Definind $k([s]_\sigma, [i]_\xi) = [g(s, i)]_\eta$, diagrama este comutativă. Unicitatea lui k rezultă din definiția lui. ■

Teorema III.8.3. *Fie* $A = [I, S, O, f, g]$, $\{\sigma_j \mid j \in J\} \subseteq \mathrm{Eq}(S)$, $\{\xi_{j'} \mid j' \in J'\} \subseteq \mathrm{Eq}(I)$ și $\sigma \in \mathrm{Eq}(S)$ *Atunci* $\bigwedge_{j \in J} \sigma_j \leqslant \mathbf{M}_{SS}(\sigma)$ *și* $\bigwedge_{j' \in J'} \xi_{j'} \leqslant \mathbf{M}_{IS}(\sigma)$ *dacă și numai dacă există o aplicație* $k: \prod_{j \in J} S/\sigma_j \times \prod_{j' \in J'} I/\xi_{j'} \to S/\sigma$ *care face comutativă diagrama*

(III.8.1)

$$\begin{array}{ccc} S \times I & \xrightarrow{\{h_j\}\,\{k_{j'}\}} & \Pi S/\sigma_j \times \Pi I/\xi_{j'} \\ {\scriptstyle f}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle k} \\ S & \xrightarrow[h]{} & S/\sigma \end{array}$$

unde $h_j(s) = [s]_{\sigma_j}$, $k_{j'}(i) = [i]_{\xi_{j'}}$, $h(s) = [s]_\sigma$.

Demonstrație. Să presupunem că există o aplicație

$$k: \prod_{j \in J} S/\sigma_j \times \prod_{j' \in J'} I/\xi_{j'} \to S/\sigma$$

cu

$$k(\{[s]_{\sigma_j} \mid j \in J\}, \{[i]_{\xi_{j'}} \mid j' \in J'\}) = [f(s, i)]_\sigma.$$

Notînd

$$\sigma' = \bigwedge_{j \in J} \sigma_j, \quad \xi' = \bigwedge_{j' \in J'} \xi_{j'},$$

vom defini

$$k': S/\sigma' \times I/\xi' \to S/\sigma$$

prin

$$k'([s]_{\sigma'}, [i]_{\xi'}) = k(\{[s]_{\sigma_j} \mid j \in J\}, \{[i]_{\xi_{j'}} \mid j' \in J'\}) = [f(s, i)]_\sigma,$$

care face astfel diagrama

$$\begin{array}{ccc} S \times I & \xrightarrow{(h', h'')} & S/\sigma' \times I/\xi' \\ {\scriptstyle f}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle k'} \\ S & \xrightarrow[h]{} & S/\sigma \end{array}$$

comutativă. Aici $h'(s) = [s]_{\sigma'}$ și $h''(i) = [i]_{\xi'}$.

Aplicînd echivalențelor $\sigma, \sigma' \in \mathrm{Eq}(S)$ și $\xi \in \mathrm{Eq}(I)$ teorema III.8.1 rezultă $\bigwedge_{j\in J} \sigma_j = \sigma' \leqslant \mathbf{M}_{BB}(\sigma)$ și $\bigwedge_{j'\in J'} \xi_{j'} = \xi' \leqslant \mathbf{M}_{IB}(\sigma)$.

Reciproc, dacă $\bigwedge_{j\in J} \sigma_j \leqslant \mathbf{M}_{BB}(\sigma)$ și $\bigwedge_{j'\in J'} \xi_{j'} \leqslant \mathbf{M}_{IB}(\sigma)$ atunci există o aplicație $h' : S/\bigwedge_{j\in J}\sigma_j \times I/\bigwedge_{j'\in J'} \xi_{j'} \to S/\sigma$ astfel încît diagrama

$$\begin{array}{ccc} S\times I & \xrightarrow{(h', h'')} & S/\bigwedge_{j\in J}\sigma_j \times I/\bigwedge_{j'\in J'}\xi_{j'} \\ {\scriptstyle f}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle h'} \\ S & \xrightarrow[h]{} & S/\sigma \end{array}$$

să fie comutativă (vezi teorema III.8.1).

Definim aplicația

$$k : \prod_{j\in J} S/\sigma_j \times \prod_{j'\in J'} I/\xi_{j'} \to S/\sigma$$

prin

$$k([s_1]_{\sigma_1}, \ldots, [s_{|J|}]_{\sigma_{|J|}}, [i_1]_{\xi_1}, \ldots, [i_{|J'|}]_{\xi_{|J'|}}) =$$

$$= \begin{cases} k'\left(\bigcap_{j\in J}[s_j]_{\sigma_j}, \bigcap_{j'\in J'}[i_{j'}]_{\xi_{j'}}\right), \text{ dacă } \bigcap_{j\in J}[s_j]_{\sigma_j} \neq \varnothing \text{ și } \bigcap_{j'\in J'}[i_{j'}]_{\xi_{j'}} \neq \varnothing = \\ \text{arbitrar, în caz contrar.} \end{cases}$$

$$= \begin{cases} [f(s, i)]_\sigma, \text{ dacă } s \in \bigcap_{j\in J}[s_j]_{\sigma_j} \text{ și } i \in \bigcap_{j'\in J'}[i_{j'}]_{\xi_{j'}} \\ \text{arbitrar, în caz contrar.} \end{cases}$$

Această aplicație face diagrama (III.8.1) comutativă. ■

Teorema III.8.4. *Fie* $A = [I, S, O, f, g]$ *și* $\{\xi_{j'} \mid j' \in J'\} \subseteq \mathrm{Eq}(I)$, $\{\sigma_j \mid j \in J\} \subseteq \mathrm{Eq}(S)$, $\eta \in \mathrm{Eq}(O)$. *Atunci* $\bigwedge_{j\in J} \sigma_j \leqslant \mathbf{M}_{SO}(\eta)$ *și* $\bigwedge_{j'\in J'} \xi_{j'} \leqslant \mathbf{M}_{IO}(\eta)$, *dacă și numai dacă există o aplicație* $k : \prod_{j\in J} S/\sigma_j \times \prod_{j'\in J'} I/\xi_{j'} \to O/\eta$ *astfel ca diagrama*

$$\begin{array}{ccc} S\times I & \xrightarrow{\{h_j\}, \{k_{j'}\}} & \Pi S/\sigma_j \times \Pi I/\xi_{j'} \\ {\scriptstyle \varepsilon}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle k} \\ O & \xrightarrow[h]{} & O/\eta \end{array}$$

să fie comutativă, unde $h(o) = [o]_\eta$, $h_j(s) = [s]_{\sigma_j}$, $k_{j'}(i) = [i]_{\xi_{j'}}$.

Demonstrație. Se procedează similar, ca în teorema III.8.3 folosind însă teorema III.8.2. ■

Deoarece realizarea tehnică a automatelor se face prin utilizarea unor dispozitive elementare care pot avea două stări apare necesar să studiem posibilitatea de a simula automatele finite prin utilizarea așa numitelor automate binare, pe care le introducem în:

Definiția III.8.1. Un *automat binar* este un 5-uplu $AB = [B_2^m, B_2^n, B_2^r, f, g]$ unde $B_2^m = \{(x_1, \ldots, x_m) \mid x_j \in B_2 = \{0, 1\}\}$, $B_2^n = \{(y_1, \ldots, y_n) \mid y_j \in B_2 = \{0,1\}\}$, $B_2^r = \{(z_1, \ldots, z_r) \mid z_j \in B_2 = \{0,1\}\}$, $f_1((y_1, \ldots, y_n), (x_1, \ldots, x_m)) = (Y_1((y_1, \ldots, y_n), (x_1, \ldots, x_m)), \ldots, Y_n((y_1, \ldots, y_n), (x_1, \ldots, x_m)))$, $g_1((y_1, \ldots, y_n), (x_1, \ldots, x_m)) = (Z_1((y_1, \ldots, y_n), (x_1, \ldots, x_m)), \ldots, Z_r((y_1, \ldots, y_n), (x_1, \ldots, x_m)))$.

Aici Y_j: $B_2^n \times B_2^m \to B_2$ și Z_k: $B_2^n \times B_2^m \to B_2$, unde $j = \overline{1, n}$ și $k = \overline{1, r}$.

Observația III.8.1. Simularea unui automat $A = [I, S, O, f, g]$ printr-un automat binar $BA = [B_2^m, B_2^n, B_2^r, f_1, g_1]$ dată de tripletul $\Psi = (t, u, y)$, unde t: $I \to B_2^m$, u: $S \to B_2^n$, y: $B_2^r \to O$ realizează o codificare a simbolilor de intrare și a stărilor automatului A respectiv ca m și n-uple de elemente ale algebrei Boole B_2.

Teorema III.8.5. *Fie $\Phi = (t, x, y)$ o suprasimulare a automatului $A = [I, S, O, f, g]$ prin automatul binar $AB = [B_2^m, B_2^n, B_2^r, f_1, g_1]$ unde y este o aplicație bijectivă. Să considerăm echivalențele $\xi_l = \ker \mathrm{pr}_l\, t \in \mathrm{Eq}(I)$, $l = \overline{1, m}$, $\sigma_j = \ker \mathrm{pr}_j\, z \in \mathrm{Eq}(S)$, $j = \overline{1, n}$, $\eta_q = \ker \mathrm{pr}_q\, y^{-1}$ și fie $C \subseteq \{y_j\}$, $D \subseteq \{x_l\}$. Atunci:*

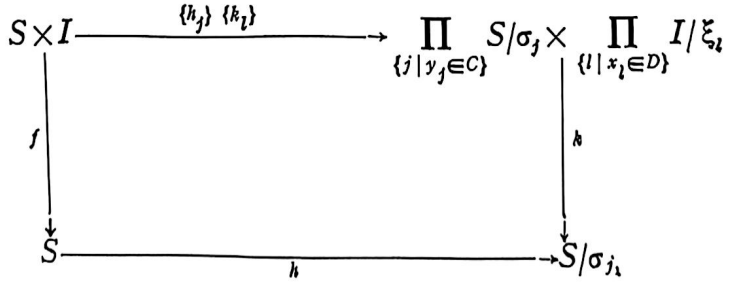
a) *funcția Y_{j_1} se exprimă prin variabilele din $C \cup D$ dacă și numai dacă:*

$$\bigwedge_{\{j \mid y_j \in C\}} \sigma_j \leqslant \mathbf{M}_{SS}(\sigma_{j_1}) \text{ și } \bigwedge_{\{l \mid x_l \in D\}} \xi_l \leqslant \mathbf{M}_{IS}(\sigma_{j_1}),$$

b) *funcția Z_{q_1} se exprimă prin variabilele din $C \cup D$ dacă și numai dacă:*

$$\bigwedge_{\{j \mid y_j \in C\}} \sigma_j \leqslant \mathbf{M}_{SO}(\eta_{q_1}) \text{ și } \bigwedge_{\{l \mid x_l \in D\}} \xi_l \leqslant \mathbf{M}_{IO}(\eta_{q_1}).$$

Demonstrație. a) Aplicînd teorema III.8.3 rezultă existența unei aplicații h: $\prod_{\{j \mid y_j \in C\}} S/\sigma_j \times \prod_{\{l \mid x_l \in D\}} I/\xi_l \to S/\sigma_{j_1}$ care face comutativă diagrama:



Aceasta revine la:

$$[f(s,i)]_{\sigma_{j_1}} = k(\{[s]_{\sigma_j}\}_{\{j \mid y_j \in C\}}, \{[i]_{\xi_l}\}_{\{l \mid x_l \in D\}}). \tag{III.8.1}$$

Deoarece $z(f(s,i)) = f_1(z(s), t(i))$ avem $z(f(s,i)) = (Y_1(z(s), t(i)), \ldots, Y_r(z(s), t(i)))$. Atunci $\mathrm{pr}_{j_1} z(f(s,i)) = Y_{j_1} z(s), t(i))$. Pe de altă parte, ținînd seama că $\sigma_{j_1} = \ker \mathrm{pr}_{j_1} z$ avem $\mathrm{pr}_{j_1} z(s_1) = \mathrm{pr}_{j_1} z(f(s,i))$, oricare ar fi $s_1 \in [f(s,i)]_{\sigma_{j_1}}$.

Conform cu formula (III.8.1) clasa $[f(s,i)]_{\sigma_{j_1}}$ este determinată exclusiv de clasele $\{[s]_{\sigma_j} \mid y_j \in C\}$ și $\{[i]_{\xi_l} \mid x_l \in D\}$, adică funcția Y_{j_1} nu depinde decît de argumentele aparținînd mulțimii $C \cup D$.

b) Din teorema III.8.4 rezultă existența unei aplicații k: $\prod_{\{j \mid y_j \in C\}} S/\sigma_j \times \times \prod_{\{l \mid x_l \in D\}} I/\xi_l \to O/\eta_{q_1}$ care face comutativă diagrama

$$\begin{array}{ccc} S \times I & \xrightarrow{\{h_j\}\{k_l\}} & \prod_{\{j \mid y_j \in C\}} S/\sigma_j \times \prod_{\{l \mid x_l \in D\}} I/\xi_l \\ \downarrow{\scriptstyle g} & & \downarrow{\scriptstyle k} \\ O & \xrightarrow[h]{} & O/\eta_{q_1} \end{array}$$

adică

$$[g(s,i)]_{\eta_{q_1}} = k(\{[s]_{\sigma_j}\}_{\{j \mid y_j \in C\}}, \{[i]_{\xi_l}\}_{\{l \mid x_l \in D\}}). \tag{III.8.2}$$

Din suprasimularea automatului A prin automatul binar AB rezultă

$$y(g_1(z(s), t(i))) = g(s,i),$$

sau

$$g_1(z(s), t(i)) = y^{-1}(g(s,i)),$$

deoarece y este o bijecție. Obținem astfel

$$y^{-1}(g(s,i)) = (Z_1(z(s), t(i)), \ldots, Z_r(z(s), t(i))).$$

Atunci $\mathrm{pr}_{q_1} y^{-1}(g(s,i)) = Z_{q_1}(s(z), t(i))$ și ținînd seama că $\eta_{q_1} = \ker \mathrm{pr}_{q_1} y^{-1}$ rezultă că $Z_{q_1}(z(s), t(i))$ este același pentru toate elementele aparținînd unei clase de echivalență după η_{q_1}.

Conform formulei (III.8.2) clasa $[o]_{\eta_{q_1}}$ este determinată exclusiv de variabilele aparținînd mulțimii $C \cup D$.

Am arătat suficiența condițiilor a) și b) din enunț. Necesitatea se obține parcurgînd raționamentul în sens invers și ținînd seama că teoremele utilizate sînt și necesare. ■

§ III. 9. REȚELE ABSTRACTE

Vom indica un procedeu de construire a unui automat din **Aut** (I, O) numit rețea abstractă prin cuplarea unor semiautomate prin intermediul unor dispozitive descrise de funcțiile de transmitere ale rețelei.

Mai exact, noțiunea de rețea abstractă este dată în:

Definiția III.9.1. *O rețea abstractă* este un $(2n + 3)$-uplu $\mathcal{R} = [\{A_j \mid j = \overline{1, n}\}, I, O, \{h_j \mid j = \overline{1, n}\}, g]$ unde $A_j = [I_j, S_j, f_j]$, $j = \overline{1, n}$ sînt semiautomatele componente ale rețelei, $I \neq \emptyset$ este alfabetul de intrare al rețelei, $O \neq \emptyset$ este alfabetul de ieșire al rețelei, $h_j: \prod_{k=1}^{n} S_k \times I \to I_j$ sînt *funcțiile de transmitere ale rețelei* și $g: \prod_{k=1}^{n} S_k \times I \to O$ este *funcția de răspuns a rețelei.*

Observația III.9.1. Cuplarea în rețele abstracte a semiautomatelor componente implică impunerea unei restricții „exterioare" r_j asupra funcționării componentei A_j, $j = \overline{1, n}$ și anume $r_j^e = \{(s_j, i_j) \mid i_j = h_j(s_1, \ldots, s_j, \ldots, s_n, i)\}$.

Observația III.9.2. Putem descrie o rețea abstractă ca fiind automatul $A(\mathcal{R}) = [I, \prod_{k=1}^{n} S_k, O, f, g]$ unde

$$f((s_1, s_2, \ldots, s_n), i) = (f_1(s_1, h_1(s_1, \ldots, s_n, i)), \ldots, f_n(s_n, h_n(s_1, \ldots, s_n, i))),$$

iar g este funcția din definiția precedentă.

Definiția III.9.2. *Rețeaua abstractă* $\mathcal{R}$ *simulează* (*semisimulează*) (*suprasimulează*) *automatul* A dacă automatul $A(\mathcal{R})$ simulează (semisimulează) (suprasimulează) automatul A (vezi definiția III.5.1).

Între rețelele abstracte se disting următoarele tipuri speciale:

Definiția III.9.3. *O rețea abstractă cu întîrziere* este o rețea abstractă pentru care aplicațiile $f_j: S_j \times I_j \to S_j$ nu depind efectiv de primul argument, deci semiautomatul A_j are starea la momentul $t + 1$ determinată exclusiv de intrarea la momentul t.

Definiția III.9.4. *O rețea abstractă normală* este o rețea abstractă în care semiautomatele A_j sînt de forma $A_j = [\prod_{l=1}^{n} S_j^l \times I_j, S_j, f_j]$, $j = \overline{1, n}$ iar pentru funcțiile de transmitere avem: $h_j(s_1, \ldots, s_n, i) = (h_j^1(s_1), \ldots, h_j^n(s_n), h_j^I(i))$, unde $h_j^l: S_l \to S_j^l$ și $h_j^I: I \to I_j$, $l = \overline{1, n}$, $j = \overline{1, n}$.

Fie $A = [I, S, O, f, g]$ un automat semisimulat de o rețea abstractă $\mathcal{R}$ în forma normală, de către perechea $\Phi = (1_I, z)$.

Definiția III.9.5. *Echivalențele induse de rețeaua abstractă normală* $\mathcal{N}$ *și de semisimularea* Φ pe automatul A sînt date de: $\sigma_j = \ker \mathrm{pr}_j z$, $\sigma_j^l = \ker h_j^l \mathrm{pr}_l z$, $l = \overline{1, n}$ și $\xi_j = \ker h_j^l$.

Remarcăm că dacă $\sigma_j^l = \omega_S$ nu se realizează un transport efectiv de informație de la semiautomatul component A_l la semiautomatul component A_j căci aplicația $h_j^l \mathrm{pr}_l z$ este constantă.

Teorema III.9.1. *Fie* $A = [I, S, O, f, g]$ *un automat și echivalențele* σ_j, $\sigma_j^l \in \mathrm{Eq}(S)$ *și* $\xi_j \in \mathrm{Eq}(I)$, $j, l = \overline{1, n}$. *Există o rețea abstractă normală* $\mathcal{N}$ *care semisimulează automatul* A *și echivalențele* σ_j, σ_j^l, ξ_j *sînt echivalențele induse de rețeaua* $\mathcal{N}$ *și semisimularea corespunzătoare* $\Phi = (1_I, z)$ *dacă și numai dacă au loc următoarele condiții:*

a) $\sigma_j \wedge \bigwedge_{l=1}^{n} \sigma_j^l \leqslant \mathbf{M}_{SS}(\sigma_j)$, $j = \overline{1, n}$,

b) $\xi_{jl} \leqslant \mathbf{M}_{IS}(\sigma_j)$, $j = \overline{1, n}$,

c) $\sigma_j \geqslant \sigma_l$, $\forall l$, $j = \overline{1, n}$,

Demonstrație. Condițiile a — c) sînt suficiente. Vom presupune deci condițiile a — c) satisfăcute și vom construi o rețea normală $\mathcal{N}$ care satisface condițiile din enunț.

Fie $A_j = [\prod_{l=1}^{n} S/\sigma_j^l \times I_j, S_j, f_j]$, unde $S_j = S/\sigma_j$, $S_j^l = S/\sigma_j^l$ $I_j = I/\xi_j$, și

$$(\text{III.9.1.}) \quad f_j([s]_{\sigma_j}, ([s_1])_{\sigma_j^1}, \ldots, [s_n]_{\sigma_j^n}, [i]_{\xi_j}) = \begin{cases} [f(s, i)]_{\sigma_j} \text{ dacă } s_1 = \ldots = s_n = s \\ \text{arbitrar, în caz contrar} \end{cases}$$

semiautomatele componente ale rețelei.

Definirea funcției f_j s-a făcut în baza teoremei III.8.3.

Într-adevăr, condițiile a), b) și teorema III.8.3 ne permit să afirmăm existența aplicației k pentru care diagrama

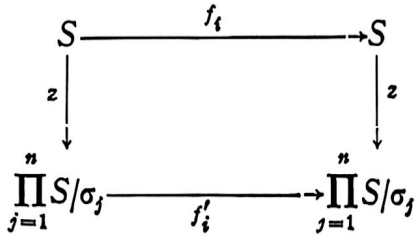
$$\begin{array}{ccc} S \times I & \xrightarrow{(\tau_j, \tau_j^k, \tau)} & S/\sigma_j \times \prod_{l=1}^{n} S/\sigma_j^l \times I/\xi_j \\ {\scriptstyle f}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle k} \\ S & \xrightarrow[\tau_j]{} & S/\sigma_j \end{array}$$

unde $\tau_j(s) = [s]_{\sigma_j}$, $\tau_j^k(s) = [s]_{\sigma_j^k}$ și $\tau(i) = [i]_{\xi_j}$ este comutativă. Aceasta revine la $[f(s, i)]_{\sigma_j} = k([s]_{\sigma_j}[s]_{\sigma_j^1}, \ldots, [s]_{\sigma_j^n}, [i]_{\xi_j})$, și pentru $s_1 = \ldots = s_n$ am luat $f_j = k$.

Vom lua $h_j([s_1]_{\sigma_1}, \ldots, [s_n]_{\sigma_n}, i) = (h_j^1([s_1]_{\sigma_1}), \ldots, h_j^n([s_n]_{\sigma_n}), h_j^I(i)) = ([[s_1]_{\sigma_1}]_{\sigma_j^1}, \ldots$ $\ldots, [[s_n]_{\sigma_n}]_{\sigma_j^n}, [i]_{\xi_j}) = ([s_1]_{\sigma_j^1}, \ldots, [s_n]_{\sigma_j^n}, [i]_{\xi_j})$, ceea ce se poate face ținînd seama de condiția c).

Funcția de ieșire a rețelei g' se poate defini în mod arbitrar, deoarece în semisimularea automatului A de către rețeaua $\mathcal{N}$ nu intervine această funcție

Perechea $(1_I, z)$ unde aplicația $z\colon S \to \prod_{j=1}^{n} S/\sigma_j$ este dată de: $z(s) = ([s]_{\sigma_1}, \ldots,$ $\ldots, [s]_{\sigma_n})$ este o semisimulare a automatului $A = [I, S, O, f, g]$ prin rețeaua abstractă normală $\mathcal{N} = [\{A_j \mid j = \overline{1, n}\}, I, O, \{h_j \mid j = \overline{1, n},\}\ g']$, deoarece diagrama



este comutativă. Aici f_i' este funcția de tranziție a automatului $A(\mathcal{N})$.

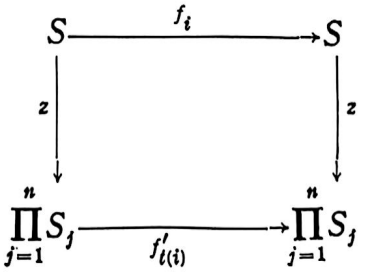
Într-adevăr $f_i'(z(s)) = f_i'([s]_{\sigma_1}, \ldots, [s]_{\sigma_n}) = (f_1([s]_{\sigma_1}, h_1([s]_{\sigma_1}, \ldots, [s]_{\sigma_n}, i)), \ldots,$ $\ldots, f_n([s]_{\sigma_n}, h_n([s]_{\sigma_1}, \ldots, [s]_{\sigma_n}, i))) = f_1([s]_{\sigma_1}, ([s]_{\sigma_1^1}, \ldots, [s]_{\sigma_1^n}, [i]_{\xi_1})), \ldots, f_n([s]_{\sigma_n},$ $([s]_{\sigma_n^1}, \ldots, [s]_{\sigma_n^n}, [i]_{\xi_n}))) = ([f(s, i)]_{\sigma_1}, \ldots, [f(s, i)]_{\sigma_n}) = z(f_i(s))$.

Rămîne să mai observăm că $\sigma_j = \ker \mathrm{pr}_j z$, $\sigma_j^l = \ker h_j^l \mathrm{pr}_l z$, $\xi_j = \ker h_j^I$.

Condițiile a) — c) sînt necesare. Să presupunem că automatul A este semisimulat de către o rețea normală $\mathcal{N}$ prin semisimularea $\Phi = (t, z)$.

Fie apoi σ_j, $\sigma_j^l \in \mathrm{Eq}(S)$, $\xi_j \in \mathrm{Eq}(I)$ echivalențele induse de rețeaua normală $\mathcal{N}$ și semisimularea Φ.

Fie rețeaua $\mathcal{N} = [\{A_j \mid j = \overline{1, n}\}, I, O, \{h_j \mid j = 1, \overline{n}\}, g']$. Comutativitatea diagramei



revine la $z(f(s, i)) = f'_{t(i)}(z(s)) = (f_1(s_1, h_1(s_1, \ldots, s_n, t(i)), \ldots, f_n(s_n, h_n(s_1, \ldots,$ $, s_n, t(i)))))$, unde $z(s) = (s_1, \ldots, s_n) \in \prod_{j=1}^{n} S_j$.

De aici găsim $\mathrm{pr}_j z(f(s, i)) = f_j(s_j, h_j(s_1, \ldots, s_n, t(i)))) = f_j(s_j, (h_j^1(s_1), \ldots,$ $, h_j^n(s_n), h_j^I(i))) = f_j(\mathrm{pr}_j z(s), (h^1 \mathrm{pr}_1 z(s), \ldots, h_j^n \mathrm{pr}_n z(s), h_j^I(i)))$.

Această egalitate arată că blocul $[f(s, i)]_{\sigma_j}$ depinde exclusiv de clasele $[s]_{\sigma_j}$, $[s]_{\sigma_j^1}$, ..., $[s]_{\sigma_j^n}$, $[i]_{\xi_j}$, așadar $[f(s, i)]_{\sigma_j} = k([s]_{\sigma_j}, [s]_{\sigma_j^1}, ..., [s]_{\sigma_j^n}, [i]_{\xi_j})$, adică diagrama III.9.1 este comutativă. Aplicînd teorema III.8.3 rezultă condițiile a) și b) din enunț.

Condiția c) este satisfăcută în virtutea definiției rețelelor abstracte normale și a echivalențelor induse. ■

Consecința III.9.1. Dacă rețeaua abstractă normală $\mathcal{N}$, din teorema precedentă este și o rețea cu întîrziere, condiția a) din enunț devine:

$$\bigwedge_{l=1}^{n} \sigma_j^l \leqslant \mathbf{M}_{SS}(\sigma_j), \quad j = \overline{1, n},$$

deoarece, dacă $[s']_{\sigma_i^1} = [s'']_{\sigma_j^1}$, ..., $[s']_{\sigma_j^n} = [s'']_{\sigma_j^n}$ adică $(s', s'') \in \bigwedge_{l=1}^{n} \sigma_j^l$, rezultă $\mathrm{pr}_j z(f(s', i)) = \mathrm{pr}_j z(f(s'', i))$, adică $(f(s', i), f(s'', i)) \in \sigma_j$.
Astfel

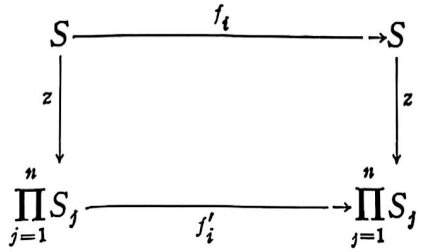
$$\bigwedge_{l=1}^{n} \sigma_j^l \leqslant \mathbf{M}_{SS}(\sigma_j).$$

Teorema III.9.2. *Fie* $A = [I, S, O, f, g]$ *un automat și* $\mathcal{N} = [\{A_j \mid j = \overline{1, n}\}, I, O\ \{h_j \mid j = \overline{1, n}\}, g']$ *o rețea abstractă care semisimulează automatul* A *prin perechea* $\Phi = (1_I, z)$. *Dacă* $\sigma_j' = \ker \mathrm{pr}_j z$, $\sigma_j = \{(s', s'') \mid h_j(z(s'), i) = h_j(z(s''), i), \forall\ i \in I\}$, $\xi_j = \{(i', i'') \mid h_j(z(s), i') = h_j(z(s), i''), \forall\ s \in S\}$, $j = \overline{1, n}$ *atunci au loc proprietățile*

a) $$\sigma_j \wedge \sigma_j' \leqslant \mathbf{M}_{SS}(\sigma_j'),$$

b) $$\xi_j \leqslant \mathbf{M}_{IS}(\sigma_j').$$

Demonstrație. Să presupunem că rețeaua $\mathcal{N}$ semisimulează automatul A, deci diagrama



este comutativă, ceea ce revine la $z(f(s, i)) = f'(z(s), i) = (f_1(\mathrm{pr}_1 z(s), h_1(z(s), i)), ..., f_n(\mathrm{pr}_n z(s), h_n(z(s), i)))$, atunci au loc condițiile a) și b) din enunțul teoremei.

În adevăr dacă $(s', s'') \in \sigma_j \wedge \sigma_j'$ atunci $\mathrm{pr}_j z(s') = \mathrm{pr}_j z(s'')$ și $h_j(z(s'), i) = h_j(z(s''), i)$. Obținem $\mathrm{pr}_j z(f(s', i)) = \mathrm{pr}_j z(f(s'', i))$, adică $(f(s', i) = f(s'', i)) \in \sigma'_j$.

Pe de altă parte, dacă $(i', i'') \in \xi_j$ avem $h_j(z(s), i') = h_j(z(s), i'')$, de unde $\mathrm{pr}_j z(f(s, i')) = \mathrm{pr}_j z(f(s, i''))$, adică $(f(s, i'), f(s, i'')) \in \sigma_j'$. ■

Definiția III.9.6. *Semiautomatul local* atașat automatului $A = [I, S, O, f, g]$ și echivalențelor $\sigma, \sigma' \in \mathrm{Eq}(S)$, $\xi \in \mathrm{Eq}(I)$ cu

$$\sigma \wedge \sigma' \leqslant \mathbf{M}_{SS}(\sigma') \text{ și } \xi \leqslant \mathbf{M}_{IS}(\sigma'),$$

este semiautomatul cu restricție

$$A(\sigma'; \sigma, \xi) = [I', r, S', f'],$$

unde:

$$I' = S/\sigma \times I/\xi,\ S' = S/\sigma',\ r^0 = \{([s_1]_{\sigma'}, ([s_2]_\sigma, [i]_\xi)) \mid ([s_1]_{\sigma'} \cap [s_2]_\sigma \neq \varnothing\}$$

și

$$f'([s_1]_{\sigma'}, ([s_2]_\sigma, [i]_\xi)) = [f(s, i)]_{\sigma'}$$

unde

$$s \in [s_1]_{\sigma'} \cap [s_2]_\sigma.$$

Observația III.9.3. Deoarece $\sigma \wedge \sigma' \leqslant \mathbf{M}_{SS}(\sigma')$ definiția funcției f' în cazul $[s_1]_{\sigma'} \cap [s_2]_\sigma \neq \varnothing$ este corectă. Într-adevăr fie $s, s' \in [s_1]_{\sigma'} \cap [s_2]_\sigma$. Atunci $(s, s') \in \sigma' \wedge \sigma$, de unde $(f(s, i), f(s', i)) \in \sigma'$, adică $[f(s, i)]_{\sigma'} = [f(s', i)]_{\sigma'}$.

Teorema III.9.3. *Fie* $\mathcal{M} = [\{A_j \mid j = \overline{1, n}\}, I, O, \{h_j \mid j = \overline{1, n}\}, g']$ *o rețea care semisimulează automatul* A. *Atunci semiautomatele componente* A_j *semisimulează semiautomatele locale atașate automatului* A.

Demonstrație. Fie $\Phi = (1_I, z)$ semisimularea automatului A prin rețeaua $\mathcal{M}$. Atunci, conform teoremei III.9.2, punînd

$$\sigma_j' = \ker \mathrm{pr}_j z,\ \sigma_j = \{(s', s'') \mid h_j(z(s'), i) = h_j(z(s''), i), \forall i \in I\},$$

$$\xi_j = \{(i', i'') \mid h_j(z(s), i') = h_j(z(s), i''),\ \forall s \in S\}$$

avem

$$\sigma_j \wedge \sigma_j' = \mathbf{M}_{SS}(\sigma_j'),$$

$$\xi_j \leqslant \mathbf{M}_{IS}(\sigma_j').$$

Considerăm semiautomatele locale $A(\sigma_j'; \sigma_j, \xi_j)$. Vom arăta că semiautomatul A_j semisimulează semiautomatul local $A_j(\sigma_j'; \sigma_j, \xi_j)$, $j = \overline{1, n}$. Vom impune componentei A_j restricția determinată de cuplarea sa în rețea (vezi observația III.9.1) și vom ține seama că semiautomatul $A(\sigma_j'; \sigma_j, \xi_j)$ este, prin definiție, un semiautomat cu restricție.

Să definim $z_j : S/\sigma_j' \to S_j$ și $t_j : S/\sigma_j \times I/\xi_j \to I_j$, prin $z_j([s]_{\sigma_j'}) = s_j$, unde $z(s) = (s_1, \ldots, s_j, \ldots, s_n)$, adică $s_j = \mathrm{pr}_j z(s)$ și $t_j([s]_{\sigma_j}, [i]_{\xi_j}) = i_j$, dacă $i_j = h_j(z(s), i)$. Propunem cititorului să verifice buna definire a funcțiilor z_j și t_j.

Atunci, $\Phi_j = (t_j, z_j)$ este o semisimulare a semiautomatului local $A(\sigma_j'; \sigma_j, \xi_j)$ de către semiautomatul A_j, deoarece diagrama

$$\begin{array}{ccc} S/\sigma_j' & \xrightarrow{f_j', ([s]_{\sigma_j}, [i]_{\xi_j})} & S/\sigma_j' \\ {\scriptstyle z_j}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle z_j} \\ S_j & \xrightarrow[f_j, t_j([s]_{\sigma_j}, [i]_{\xi_j})]{} & S_j \end{array}$$

este comutativă.

Într-adevăr, $z_j(f_j'([s]_{\xi_j'}, ([s]_{\sigma_j}, [i]_\xi))) = z_j([f(s, i)]_{\sigma_j'}) = f_j(\mathrm{pr}_j z(s), h_j(z(s), i)) = f_j(z_j([s]_{\sigma_j'}) t_j([s]_{\sigma_j}, [i]_{\xi_j}))$. ■

Fie $A(\sigma'; \sigma, \xi)$ un automat local atașat automatului $A = [I, S, O, f, g]$ și $\pi \in \mathrm{Eq}(S)$ cu $\pi \geqslant \sigma'$. Să notăm cu $\overline{\pi} \in \mathrm{Eq}(S/\sigma')$, unde $([s_1]_{\sigma'}, [s_2]_{\sigma'}) \in \overline{\pi}$ dacă și numai dacă $(s_1, s_2) \in \pi$.

Teorema III.9.4. *Fie* $\overline{\mathbf{m}}_{SS}$ *operatorul slab al lui Hartmanis și Stearns din algebra slabă* β_{SS} *atașată automatului local* $A(\sigma'; \sigma_1, \xi)$, *atunci*

$$\overline{\mathbf{m}}_{SS}(\overline{\pi}) = \overline{\mathbf{m}_{SS}(\pi \wedge \sigma) \vee \sigma'}$$

pentru $\pi \geqslant \sigma'$.

Demonstrație. Să arătăm mai întîi că $(\overline{\pi}, \overline{\mathbf{m}_{SS}(\pi \wedge \sigma) \vee \sigma'}) \in \beta_{SS}$. În acest scop, fie $([s_1]_{\sigma'}, [s_2]_{\sigma'}) \in \overline{\pi}$ și $([s_1]_{\sigma'}, ([s_0]_\sigma, [i]_\xi)) \in r^c$, $([s_2]_{\sigma'}, ([s_0]_\sigma, [i]_\xi)) \in r^c$. Aceasta înseamnă că $(s_1, s_2) \in \pi$, $[s_1]_{\sigma'} \cap [s_0]_\sigma \neq \emptyset$ și $[s_2]_{\sigma'} \cap [s_0] \neq \emptyset$. Trebuie să arătăm că $(f'([s_1]_{\sigma'}, \overline{([s_0]_\sigma, [i]_\xi)}), f'([s_2]_{\sigma'}, ([s_0]_\sigma, [i]_\xi))) \in \overline{\mathbf{m}_{SS}(\pi \wedge \sigma) \vee \sigma'}$, adică $([f(s', i)]_\sigma, [f(s'', i)]_{\sigma'}) \in \mathbf{m}_{SS}(\pi \wedge \sigma) \vee \sigma'$, unde $s' \in [s_1]_{\sigma'} \cap [s_0]_\sigma, s'' \in [s_2]_{\sigma'} \cap [s_0]_\sigma$.

Aceasta revine la $(f(s', i), f(s'', i)) \in \mathbf{m}_{SS}(\pi \wedge \sigma) \vee \sigma'$.

Într-adevăr, deoarece $(s', s_1) \in \sigma'$, $(s'', s_2) \in \sigma'$, $(s_1, s_2) \in \pi$, și $\sigma' \leqslant \pi$ avem $(s', s'') \in \pi$. Apoi, din $(s', s_0) \in \sigma$, $(s'', s_0) \in \sigma$ rezultă $(s', s'') \in \sigma$, de unde $(s', s'') \in \pi \wedge \sigma$, de unde $(f(s', i), f(s'', i)) \in \mathbf{m}(\pi \wedge \sigma)$, deci $(f(s', i), f(s'', i)) \in \mathbf{m}(\pi \wedge \sigma) \vee \sigma'$. Obținem astfel $([f(s', i)]_{\sigma'}, [f(s'', i)]_{\sigma'}) \in \overline{\mathbf{m}_{SS}(\pi \wedge \sigma) \vee \sigma'}$.

Atunci

$$\overline{\mathbf{m}}_{SS}(\overline{\pi}) \leqslant \overline{\mathbf{m}_{SS}(\pi \wedge \sigma) \vee \sigma'}. \tag{III.9.2}$$

Să arătăm acum că oricare ar fi $\pi' \in \mathrm{Eq}(S)$ cu $\pi' \geqslant \sigma'$ și $(\overline{\pi}, \overline{\pi}') \in \beta_{SS}$ avem $\overline{\pi}' \geqslant \overline{\mathbf{m}(\pi \wedge \sigma) \vee \sigma'}$.

Fie $([s']_{\sigma'}, [s'']_{\sigma'}) \in \overline{\pi}$. Atunci $(f'([s']_{\sigma'}, ([s_0]_{\sigma'}, [i]_\xi)), f'([s'']_{\sigma'}, ([s_0]_\sigma, [i]_\xi))) \in \overline{\pi}'$, unde

$$[s']_{\sigma'} \cap [s_0]_\sigma \neq \emptyset \text{ și } [s'']_{\sigma'} \cap [s_0]_\sigma \neq \emptyset.$$

Aceasta implică

$$([f(s_1', i)]_{\sigma'}, [f(s_1'', i)]_{\sigma'}) \in \overline{\pi}', \text{ unde } s_1' \in [s']_{\sigma'} \cap [s_0]_\sigma \text{ și } s_1'' \in [s'']_{\sigma'} \cap [s_0]_\sigma,$$

ceea ce atrage că $(f(s_1', i), f(s_1'', i)) \in \pi'$ deîndată ce $(s', s'') \in \pi \wedge \sigma$.

De aceea $\pi' \geqslant \mathbf{m}(\pi \wedge \sigma)$ și deci $\pi' \geqslant \mathbf{m}(\pi \wedge \sigma) \vee \sigma'$, de unde $\overline{\pi}' \geqslant \overline{\mathbf{m}(\pi \wedge \sigma) \vee \sigma'}$. Luînd $\overline{\mathbf{m}}_{ss}(\overline{\pi}) = \overline{\pi}'$ (ceea ce se poate face deoarece $(\overline{\pi}, \mathbf{m}_{ss}(\overline{\pi})) \in \in \beta_{ss}$ și $\mathbf{m}_{ss}(\pi) \geqslant \sigma'$) avem

$$\overline{\mathbf{m}}_{ss}(\overline{\pi}) \geqslant \overline{\mathbf{m}_{ss}(\pi \wedge \sigma) \vee \sigma'},$$

care împreună cu relația (III.9.2) dă egalitatea dorită. ■

Deoarece o algebră de asociere slabă nu este închisă la reuniune am introdus numai operatorul slab $\overline{\mathbf{m}}_{ss}$. Se poate introduce un analog al operatorului $\mathbf{M}_{ss}$ prin

$$\overline{\mathbf{M}}_{ss}(\pi') = \vee\{\pi \mid \pi \geqslant \sigma', \mathbf{m}_{ss}(\pi \wedge \sigma) \leqslant \pi'\}.$$

Consecința III.9.2. Fie $\sigma = \omega_S$, atunci:

a) $\overline{\mathbf{m}}_{ss}(\overline{\pi}) = \overline{\mathbf{m}_{ss}(\pi) \vee \sigma'}$, pentru $\pi > \sigma'$,

b) $\overline{\mathbf{M}}_{ss}(\overline{\pi}) = \overline{\mathbf{M}_{ss}(\pi)}$ pentru $\pi \geqslant \sigma'$.

§ III. 10. METODE LATICIALE DE DESCOMPUNERE A AUTOMATELOR FINITE

Fie $\mathcal{N} = [\{A_j \mid j = \overline{1, n}\}, I, O, \{h_j \mid j = \overline{1, n}\}, g']$ o rețea abstractă normală.

Definiția III.10.1. *Relația de precedență* π pe mulțimea $\{A_j \mid j = \overline{1, n}\}$ este dată de $(A_{j_1}, A_{j_2}) \in \pi$ dacă și numai dacă $\pi^{j_1}_{j_2} \neq \omega_{S_{j_1}}$, unde $\pi^{j_1}_{j_2} = \ker h^{j_1}_{j_2}$.

Observația III.10.1. Dacă $|S^{j_1}_{j_2}| = 1$ nu se transmite nici o informație de la semiautomatul A_{j_1}, la semiautomatul A_{j_2}, ceea ce revine la $\pi^{j_1}_{j_2} = \omega_{S_{j_1}}$. În schimb, dacă $\pi^{j_1}_{j_2} \neq \omega_{S_{j_1}}$, $h^{j_1}_{j_2}$ nu poate fi o aplicație constantă ceea ce impune un transfer de informație de la semiautomatul A_{j_1} la semiautomatul A_{j_2}.

Definiția III.10.2. *O mulțime închisă de componente ale rețelei* $\mathcal{N}$ este o mulțime $C \subseteq \{A_j \mid j = \overline{1, n}\}$ care odată cu semiautomatul A_j conține toate semiautomatele care îl preced pe A_j, adică

$$\forall A_j \in C, \ (A_h, A_j) \in \pi \rightarrow A_h \in C.$$

Teorema III.10.1. *Mulțimile închise de componente formează o latice distributivă* $L(\mathcal{N})$ *față de operațiile de reuniune și intersecție de mulțimi.*

Demonstrație. Se constată imediat că dacă C_1 și C_2 sînt mulțimi închise de componente $C_1 \cup C_2$ și $C_1 \cap C_2$ sînt mulțimi închise. Distributivitatea laticei $L(\mathcal{N})$ rezultă din distributivitatea operațiilor de reuniune și intersecție de mulțimi. ■

Observația III.10.2. Laticea $L(\mathcal{N})$ formează un sistem cu închidere. Ca atare vom considera *operatorul de închidere* $\mathbf{C}$ atașat acestui sistem cu închidere $L(\mathcal{N})$ (vezi teorema I.5.1). Avem $\mathbf{C} : \mathcal{P}(\{A_j \mid j = \overline{1, n}\}) \to L(\mathcal{N})$ cu $\mathbf{C}(D) = \bigcap\{C \mid C \in L(\mathcal{N}),\ D \subseteq C\},\ \forall D \in \mathcal{P}(\{A_j \mid j = \overline{1, n}\})$.

Teorema III.10.2 *Operatorul de închidere* $\mathbf{C}$ *se bucură de proprietățile:*

a) $\mathbf{C}(D_1 \cap D_2) \subseteq \mathbf{C}(D_1) \cap \mathbf{C}(D_2)$;

b) $\mathbf{C}(D_1 \cup D_2) = \mathbf{C}(D_1) \cup \mathbf{C}(D_2)$.

Demonstrație. a) Avem $\mathbf{C}(D_1 \cap D_2) \subseteq \mathbf{C}(D_1)$ și $\mathbf{C}(D_1 \cap D_2) \subseteq \mathbf{C}(D_2)$ (în virtutea izotoniei unui operator de închidere), de unde $\mathbf{C}(D_1 \cap D_2) \subseteq \mathbf{C}(D_1) \cap \mathbf{C}(D_2)$.

b) Din $\mathbf{C}(D_1), \mathbf{C}(D_2) \subseteq \mathbf{C}(D_1 \cup D_2)$ avem $\mathbf{C}(D_1) \cup \mathbf{C}(D_2) \subseteq \mathbf{C}(D_1 \cup D_2)$, iar dacă $A_j \in \mathbf{C}(D_1 \cup D_2)$ el este predecesor al unui semiautomat din D_1 sau din D_2 sau poate aparține lui D_1 sau D_2. De aici rezultă $A_j \in \mathbf{C}(D_1)$ sau $A_j \in \mathbf{C}(D_2)$, deci $\mathbf{C}(D_1 \cup D_2) \subseteq \mathbf{C}(D_1) \cup \mathbf{C}(D_2)$. ■

Definiția III.10.3. *O rețea abstractă normală fără circuite* este o rețea abstractă normală cu proprietatea

$$A_j \notin \mathbf{C}(A_k) \text{ sau } A_k \notin \mathbf{C}(A_j),$$

pentru $j, k = \overline{1, n}$ cu $j \neq k$.

Observația III.10.3. Într-o rețea abstractă normală fără circuite nu există circuite între semiautomate componente distincte, dar este permisă transmiterea informației de la ieșirea la intrarea aceluiași semiautomat.

Definiția III.10.4. O *descompunere* a automatului A este o pereche $(\mathcal{N}, \Phi)$, unde $\mathcal{N}$ este o rețea abstractă normală fără circuite, iar Φ este o semisimulare a automatului A prin rețeaua $\mathcal{N}$.

Fie $(\mathcal{N}, \Phi)$ o descompunere a automatului $A = [I, S, O, f, g]$, $\Phi = (1_I, z)$ și $\{A_j \mid j = \overline{1, n}\}$ mulțimea componentelor rețelei $\mathcal{N}$.

Definiția III.10.5. Echivalența $\sigma(D)$ atașată mulțimii $D \subseteq \{A_j \mid j = \overline{1, n}\}$ este dată prin

$$\sigma(D) = \bigwedge\{\sigma_j \mid A_j \in D\}.$$

unde σ_j este echivalența atașată componentei A_j, $\sigma_j = \ker \mathrm{pr}_j z$.

Avem atunci:

Teorema III.10.3. *Au loc proprietăţile:*
a) *Dacă* $C \in L(\mathcal{N})$ *atunci* $\sigma(C)$ *este o congruenţă;*
b) $\sigma(C_1 \cup C_2) = \sigma(C_1) \cap \sigma(C_2)$.

Demonstraţie. a) Fie $C = \{A_l \mid l \in J\}$ o mulţime închisă de componente. Atunci $\sigma(C) = \bigwedge_{l \in J} \sigma_l$. Reţeaua $\mathcal{N}$ fiind fără circuite starea semiautomatului A_l este determinată exclusiv de predecesorii săi $\{A_k \mid k \in J_l\}$ şi avem:

$$\bigwedge_{k \in J_l} \sigma_k \leqslant \mathbf{M}_{SS}(\sigma_l). \tag{III.10.1}$$

Aceasta, deoarece dacă $(s', s'') \in \bigwedge_{k \in J_l} \sigma_k$ atunci $\mathrm{pr}_k z(s') = \mathrm{pr}_k z(s'')$, $\forall k \in J_l$, de unde $\mathrm{pr}_l z(f(s', i)) = \mathrm{pr}_l z\,(f(s'', i))$, $\forall\, i \in I$.

Deci, $(f(s', i), f(s'', i)) \in \sigma_l$ adică $(\bigwedge_{k \in J_l} \sigma_k, \sigma_l) \in \alpha_{SS}$ şi obţinem inegalitatea (III.10.1). Deoarece C este o mulţime închisă de componente, din $A_l \in C$ urmează că predecesorii săi $\{A_k \mid k \in J_l\} \subseteq C$, deci $J_l \subseteq J$.

Avem:

$$\sigma(C) = \bigwedge_{l \in J} \sigma_l \leqslant \bigwedge_{l \in J} \left(\bigwedge_{k \in J_l} \sigma_k\right) \leqslant \bigwedge_{l \in J} \mathbf{M}_{SS}(\sigma_l) = \mathbf{M}_{SS}\left(\bigwedge_{l \in J} \sigma_l\right) = \mathbf{M}_{SS}(\sigma(C)).$$

În baza teoremei III.6.9, $\sigma(C)$ este o congruenţă.
b) Pentru $C_k = \{A_j \mid j \in J_k\}$, $k = 1, 2$ putem scrie

$$\sigma(C_1 \cup C_2) = \bigwedge_{j \in J_1 \cup J_2} \sigma_j = \left(\bigwedge_{j \in J_1} \sigma_j\right) \wedge \left(\bigwedge_{j \in J_2} \sigma_j\right) = \sigma(C_1) \wedge \sigma(C_2). \blacksquare$$

Consecinţa III.10.1. Dacă $C_1 \subseteq C_2$ atunci $\sigma(C_1) \geqslant \sigma(C_2)$. Rezultă imediat din b). ■

Observaţia III.10.4. Fie $(\mathcal{N}, \Phi)$ o descompunere a automatului A şi $C \in L(\mathcal{N})$. Cunoaşterea stărilor semiautomatelor din C conduce la cunoaşterea stării automatului A pînă la echivalenţa $\sigma(C)$.

Dacă $\sigma(C_1) = \sigma(C_2)$ pentru mulţimile de componente C_1, $C_2 \in L(\mathcal{N})$ dar $C_1 \subsetneq C_2$ şi $A_j \in C_2 \setminus C_1$ atunci $\sigma_j \geqslant \sigma(C_2) = \sigma(C_1)$ şi cunoaşterea stării semiautomatului A_j nu aduce nici o informaţie în plus faţă de cunoaşterea stărilor semiautomatelor din C_1.

Astfel A_j apare a fi „redondant" în mulţimea C_2.

Observaţia III.10.5. Dacă aplicaţia $\sigma : L(\mathcal{N}) \to \mathrm{Eq}(S)$ este injectivă atunci nu există semiautomate componente redondante.

Definiţia III.10.6. O *mulţime nercdondantă de echivalenţe* pe automatul A, $\Sigma \subseteq \mathrm{Eq}(S)$ este o mulţime de echivalenţe $\Sigma = \{\sigma_1, \ldots, \sigma_m\}$ astfel ca $\sigma_j \neq \sigma_k$ pentru $j \neq k$ şi $\forall\, \Sigma_1 \subseteq \Sigma$ şi $\sigma_k \in \Sigma$,

$$\wedge \{\sigma_j \mid \sigma_j \in \Sigma_1\} \leqslant \sigma_k \to \exists\, \sigma_l \in \Sigma_1 \text{ cu } \sigma_l \leqslant \sigma_k.$$

Teorema III.10.4. *Fie* $(\mathcal{N}, \Phi)$ *o descompunere a automatului* A *şi* $\{A_j \mid j = \overline{1, n}\}$ *semiautomatele componente ale reţelei* $\mathcal{N}$. *Atunci mulţimea de echivalenţe* $\{\sigma(\mathbf{C}(\{A_j\})) \mid j = \overline{1, n}\}$ *este neredondantă dacă aplicaţia* $\sigma: L(\mathcal{N}) \to \mathrm{Eq}(S)$ *este injectivă.*

Demonstraţie. Să presupunem că mulţimea de echivalenţe

$$\Sigma = \{\sigma(\mathbf{C}(\{A_j\})) \mid j = \overline{1, n}\}$$

este redondantă. Există o mulţime $\Sigma_1 \subseteq \Sigma$ şi o echivalenţă $\sigma(\mathbf{C}(\{A_k\})) \in \Sigma$ astfel ca

$$\bigwedge_{\Sigma_1} \{\sigma(\mathbf{C}(\{A_j\}))\} \leqslant \sigma(\mathbf{C}(\{A_k\})) \tag{III.10.2}$$

şi

$$\sigma(\mathbf{C}(\{A_k\})) \not\geqslant \sigma(\mathbf{C}(\{A_j\})), \ \forall\, \sigma(\mathbf{C}(\mathbf{C}(\{A_j\}))) \in \Sigma_1.$$

De aici urmează că $A_k \notin \mathbf{C}(\{A_j\})$, pentru orice A_j pentru care $\sigma(\mathbf{C}(\{A_j\})) \in \Sigma_1$, deoarece dacă $A_k \in \mathbf{C}(\{A_j\})$ ar urma $\mathbf{C}(\{A_k\}) \subseteq \mathbf{C}(\mathbf{C}(\{A_j\})) = \mathbf{C}(\{A_j\})$ şi $\sigma(\mathbf{C}(\{A_k\})) \geqslant \sigma(\mathbf{C}(\{A_j\}))$ (vezi consecinţa III.10.1).

Să notăm $C_1 = \bigcup \{\mathbf{C}(\{A_j\}) \mid \sigma(\mathbf{C}(\{A_j\})) \in \Sigma_1\}$.

Atunci $A_k \notin C_1$ şi prin urmare mulţimile închise de componente C_1 şi $C_2 = C_1 \cup \mathbf{C}(\{A_k\})$ sînt distincte. Vom arăta că $\sigma(C_1) = \sigma(C_2)$ deci σ n-ar fi injectivă.

Din formula (III.10.2) şi ţinînd seama că C_1 este o mulţime închisă de componente rezultă că

$$\sigma(C_1) = \bigwedge_{\Sigma_1} \{\sigma(\mathbf{C}(\{A_j\}))\} \leqslant \sigma(\mathbf{C}(\{A_k\})).$$

De aici găsim

$$\sigma(C_1) = \sigma(C_1) \wedge \sigma(\mathbf{C}(\{A_k\})) = \sigma(C_1 \cup \mathbf{C}(\{A_k\})) = \sigma(C_2)$$

(vezi teorema III.10.1, punctul *b*)). ■

Teorema III.10.5. [*teorema lui Hartmanis-Stearns de structură a automatelor finite*]. *Fie* $A = [I, S, O, f, g]$ *un automat finit şi* $\Sigma = \{\sigma_1, \ldots, \sigma_n\} \subseteq \mathrm{Eq}(S)$ *o mulţime neredondantă de congruenţe pe automatul* A. *Atunci există o reţea abstractă normală, fără circuite cu* n *semiautomate componente* $A_1, \ldots, A_n$ *şi semisimularea* Φ *astfel ca:*

a) $(\mathcal{N}, \Phi)$ *este o descompunere a automatului* A;

b) $A_k \in \mathbf{C}(\{A_j\})$ *dacă şi numai dacă* $\sigma_k \geqslant \sigma_j$;

c) $\sigma(\mathbf{C}(\{A_j\})) = \sigma_j$, $j = \overline{1, n}$;

d) $\sigma: L(\mathcal{N}) \to \mathrm{Eq}(S)$ *este injectivă.*

Demonstrație. a) Pentru $\sigma_j \in \Sigma$ fie $\sigma'_j \in \mathrm{Eq}(S)$ cu $\sigma'_j \geqslant \sigma_j$. Să definim $\xi_j = \iota_I$ pentru $j = \overline{1, n}$ și

$$\sigma^l_j = \begin{cases} \sigma'_l, & \text{dacă } \sigma_l \geqslant \sigma_j \\ \omega_S, & \text{în caz contrar,} \end{cases}$$

pentru $j, l = \overline{1, n}$.

Atunci putem aplica teorema III.9.1 automatului A și echivalențelor $\sigma_j, \sigma^l_j \in \mathrm{Eq}(S)$, $\xi_j \in \mathrm{Eq}(I)$ deoarece condițiile a) — c) ale acestei teoreme sînt satisfăcute.

În adevăr,

$$\sigma_j \wedge \bigwedge_{l=1}^{n} \sigma^l_j \leqslant \sigma_j \leqslant \mathbf{M}_{SS}(\sigma_j),$$

deoarece σ_j este o congruență (vezi consecința III.6.1).

Apoi $\iota_I = \xi_j \leqslant \mathbf{M}_{IS}(\sigma_j)$ și $\sigma^l_j = \sigma'_l \geqslant \sigma_l$, $\forall\, l = \overline{1, n}$.

Prin urmare rețeaua abstractă normală

$$\mathcal{N} = [\{A_j \mid j = \overline{1, n}\}, I, O, \{h_j \mid j = \overline{1, n}\}, g']$$

construită în teorema III.9.1 semisimulează automatul A.

Rețeaua $\mathcal{N}$ este fără circuite deoarece dacă ar exista un circuit între semiautomatele A_j și A_l ar rezulta $\sigma_j = \sigma_l$, ceea ce ar contrazice definiția III.10.6.

b) $A_k \in \mathbf{C}(\{A_j\})$ dacă și numai dacă A_k precede A_j sau există un transfer de informație de la A_k la A_j. Aceasta se realizează cînd $\sigma^k_j < \omega_S$, adică $\sigma_k \geqslant \sigma_j$.

c) Avem $\sigma(\mathbf{C}(\{A_j\})) = \bigwedge\{\sigma_k \mid A_k \in \mathbf{C}(\{A_j\})\} = \sigma_j$.

d) Dacă avem $\sigma(C_1) = \sigma(C_2)$ pentru mulțimile închise C_1 și C_2, dar $C_1 \neq C_2$ putem presupune că există un semiautomat $A_k \in C_2 \setminus C_1$. Alegînd $\Sigma_1 = \{\sigma_j \mid A_j \in C_1\}$ avem

$$\bigwedge_{\sigma_j \in \Sigma_1} \sigma_j = \sigma(C_1) = \sigma(C_2) \leqslant \sigma_k$$

și conform definiției III.10.6 există $\sigma_j \in \Sigma_1 (A_j \in C_1)$ astfel ca $\sigma_j \leqslant \sigma_k$ ceea ce implică $A_k \in \mathbf{C}(\{A_j\}) \subseteq C_1$, deoarece C_1 este o mulțime închisă de componente. ■

§ III. 11. PROPIETĂȚI LATICIALE ALE AUTOMATELOR AUTONOME

Automatele autonome pe lîngă importanța teoretică au o deosebită însemnătate practică dată fiind prezența lor ca generatoare de tact (sau orologii) în unitățile de comandă ale sistemelor de calcul.

Fie $A = [\{i\}, S, O, f, g]$ un automat autonom S-finit.

Teorema III.11.1. *Oricare ar fi starea s_0 a automatului autonom A există $r, m \in N^*$ astfel ca $g_{s_0}(i^r) = g_{s_0}(i^{r+m})$.*

Demonstrație. Fie $|S| = n$. Atunci în mulțimea de stări $\{f(s_0, i^k) \mid k = \overline{1, n+1}\}$ trebuie să existe cel puțin două stări egale, adică $f(s_0, i^{r-1}) = f(s_0, i^{r+m-1})$.

Fie r și m cele mai mici numere cu această proprietate. Șirul stărilor devine astfel periodic. Deoarece automatul este autonom vom avea $g(s_0, i^r) = g(f(s_0, i^{r-1}), i) = g(f(s_0, i^{r+m-1}), i) = g(s_0, i^{r+m})$, prin urmare și șirul ieșirilor devine periodic după trecerea a r tacte. ■

Definiția III.11.1. *Perioada tranzitorie* și respectiv *perioada* automatului autonom A, în starea s_0 sînt numerele r și m din teorema precedentă.

Observația III.11.1. Pentru automatele autonome tare conexe oricare ar fi s_0 perioada tranzitorie este zero și toate stările au aceeași perioadă pe care o vom numi perioada automatului; ea este egală cu $|S|$.

Teorema III.11.2. *Fie A un automat autonom tare conex, cu perioada m și fie $M = \{m_1 \mid m_1 \in N^*, m_1/m\}$*. Atunci au loc următoarele proprietăți:*

a) *pentru orice $m_1 \in M$ există o congruență unică σ_{m_1} pe S cu $|S/\sigma_{m_1}| = m_1$ și orice congruență a automatului A are această formă;*

b) $\sigma_{m_2} \leqslant \sigma_{m_1}$ *dacă și numai dacă* m_1/m_2;

c) *automatul A/σ_{m_1} este tare conex și are perioada m_1;*

d) *latticea congruențelor automatului A este distributivă.*

Demonstrație. a) Fie $m_1 \in M$ și $S = \{s_0, s_1, \ldots, s_{m-1}\}$ mulțimea stărilor automatului aranjată în ordinea de parcurgere atunci cînd automatul pleacă din starea s_0. Definim:

$$\sigma_{m_1} = \{(s_j, s_l) \mid j \equiv l (\mathrm{mod}\, m_1)\}.$$

Echivalența σ_{m_1} este o congruență. Într-adevăr, fie $(s_j, s_l) \in \sigma_{m_1}$. Atunci avem $f(s_k, i) = s_h$, unde $h \equiv k + 1 (\mathrm{mod}\, m)$ și, deoarece m_1/m avem și $h \equiv k + 1 (\mathrm{mod}\, m_1)$.

Astfel $(f(s_j, i), f(s_l, i)) \in \sigma_{m_1}$ deoarece $j + 1 \equiv l + 1 (\mathrm{mod}\, m_1)$.

Este clar că $|S/\sigma_{m_1}| = |m_1|$ deoarece există m_1 clase de resturi față de modulul m_1.

Fie σ o congruență oarecare a automatului A și $[s_0]_\sigma \in S/\sigma$. Să notăm cu k cel mai mic număr pentru care avem $(s, f(s, i^k)) \in \sigma$, unde $s \in [s_0]_\sigma$.

Dacă $(s', s) \in \sigma$, deoarece σ este o congruență avem $(f(s', i^k), f(s, i^k)) \in \sigma$ și rezultă că $(s', f(s', i^k)) \in \sigma$, oricare ar fi starea $s' \in [s_0]_\sigma$; de această proprietate se bucură orice clasă $[s_1]_\sigma$. Este atunci clar că $(s_j, s_l) \in \sigma$ dacă și numai dacă $j \equiv l (\mathrm{mod}\, k)$ unde k/m, deci $k \in M$ și $\sigma = \sigma_k$.

b) Dacă m_1/m_2 atunci din $j \equiv l (\mathrm{mod}\, m_2)$ rezultă $j \equiv l (\mathrm{mod}\, m_1)$ adică $\sigma_{m_2} \leqslant \sigma_{m_1}$.

---

* m_1/m înseamnă „m_1 divide m".

Reciproc, dacă $\sigma_{m_2} \leqslant \sigma_{m_1}$ din $j \equiv l(\mathrm{mod}\, m_2)$ rezultă $j \equiv l(\mathrm{mod}\, m_1)$, de unde, în particular, deoarece $m_2 \equiv 0(\mathrm{mod}\, m_2)$ avem $m_2 \equiv 0(\mathrm{mod}\, m_1)$ adică m_1/m_2.

c) Tarea conexiune a automatului A/σ_{m_1} rezultă din tarea conexiune a automatului A. În baza observației III.11.1 și ținînd seama că $|S/\sigma_{m_1}| = m_1$ urmează că automatul A/σ_{m_1} are perioada m_1.

d) Mulțimea M se poate organiza ca o latice față de relația de divizibilitate. Se știe că această latice este distributivă și ținînd seama de punctele a) și b) laticea congruențelor automatului A este izomorfă cu ea. ■

Teorema III.11.3. *Un automat* $A = [I, S, O, f, g]$ *este semisimulat de automatul* $A_1 \to A_2$ *unde* $A_1 = [\{i_1\}, S_1, O_1, f_1, g_1]$ *este un automat autonom dacă semiautomatul* $S(A_1) = [\{i_1\}, S_1, f_1]$ *este izomorf cu semiautomatul local* $A(\sigma; \omega_S, \iota_S) = [I', r, S/\sigma, f']$, *iar* σ *este o congruență pe* A, *cu* $\sigma \geqslant \mathbf{m}_{IS}(\omega_I)$.

Demonstrație. Să presupunem că automatul A este semisimulat prin $\Phi = (t, z)$ de către gruparea în serie $A_1 \to A_2$, adică diagrama

$$\begin{array}{ccc} I^* & \xrightarrow{f_s} & S \\ {\scriptstyle t}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle z} \\ \{i_1\}^* & \xrightarrow[\vec{f}_{z(s)}]{} & S_2 \times S_1 \end{array}$$

este comutativă. Homomorfismul de semigrupuri $t: I^* \to \{i_1\}^*$ se definește prin $t(p) = i_1^{l(p)}$, iar comutativitatea diagramei revine la:

$$z(f(s, i)) = \vec{f}(z(s), i_1) = (f_2(\mathrm{pr}_1 z(s), g_1(\mathrm{pr}_2 z(s), i)), f_1(\mathrm{pr}_2 z(s), i_1))$$

sau

$$\mathrm{pr}_2 z(f(s, i)) = f_1(\mathrm{pr}_2 z(s), i_1).$$

Să definim $\sigma = \ker \mathrm{pr}_2 z$, unde $\mathrm{pr}_2 z: S \to S$.

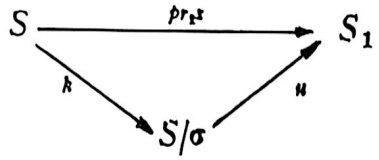
Echivalența σ este o congruență. Într-adevăr, dacă $(s', s'') \in \sigma$ și $z(s') = (s_2', s_1')$, $z(s'') = (s_2'', s_2'')$ atunci: $s_1' = s_1''$ și $\mathrm{pr}_2 z(f(s', p)) = pr_2 \vec{f}((s_2', s_1'), i_1^{l(p)}) = f_1(s', i_1^{l(p)}) = f_1(s'', i_1^{l(p)}) = \mathrm{pr}_2 \vec{f}((s_2'', s_1''), i_1^{l(p)}) = \mathrm{pr}_2 z(f(s'', p))$, deci $(f(s', p), f(s'', p)) \in \sigma$.

Pentru a construi semiautomatul local $A(\sigma; \omega_S, \omega_I)$ trebuie ca: $\omega_S \wedge \sigma \leqslant \mathbf{M}_{SS}(\sigma)$ și $\omega_I \leqslant \mathbf{M}_{IS}(\sigma)$.

Avem $\sigma \leqslant \mathbf{M}_{SS}(\sigma)$ deoarece σ este o congruență. Apoi $(\omega_I, \sigma) \in \alpha_{IS}$, deoarece, dacă $i', i'' \in I$, $\mathrm{pr}_2 z(f(s, i')) = \mathrm{pr}_2 \vec{f}(z(s), i_1) = \mathrm{pr}_2 z(f(s, i''))$. De aici $\sigma \geqslant \mathbf{m}_{IS}(\omega_I)$ sau $\omega_I \leqslant \mathbf{M}_{SS}(\sigma)$.

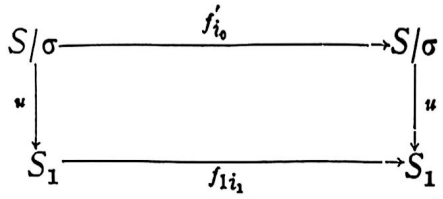
Să remarcăm că $A(\sigma; \omega_S, \omega_I)$ este un semiautomat autonom deoarece alfabetul său de intrare $I' = S/\omega_S \times I/\omega_I = (\{S\}, \{I\})$ are un singur simbol $i_0 = (\{S\}, \{I\})$. Relația de restricție în acest caz este $r = \emptyset$ deoarece $[s]_\sigma \cap \bigcap S = [s]_\sigma \neq \emptyset$. Să arătăm că semiautomatele $S(A_1)$ și $A(\sigma; \omega_S, \omega_I)$ sînt izomorfe.

Pentru aceasta să factorizăm aplicația surjectivă $\mathrm{pr}_2 z\colon S \to S_1$ conform diagramei



unde $h(s) = [s]_\sigma$, iar u este o bijecție cu proprietatea $u([s]_\sigma) = s_1$, unde $\mathrm{pr}_2 z(s) = s_1$.

Perechea $\chi = (v, u)$ unde $v(i_0) = i_1$, iar u este aplicația de mai sus, este un izomorfism între semiautomatele $A\ (\sigma; \omega_S, \omega_I)$ și $S\ (A_1)$, deoarece diagrama



este comutativă.

Într-adevăr, $u(f'_{i_0}([s]_\sigma)) = u([f(s, i)]_\sigma) = s_1$, unde $\mathrm{pr}_2 z(f(s, i)) = s_1$, iar $f_{1i_1}(u([s]_\sigma)) = f_{1i_1}(s'_1)$, unde $s'_1 = \mathrm{pr}_2 z(s)$.

De aici $u(f'_{i_0}([s]_\sigma)) = f_{1i_1}(u([s]_\sigma))$. ■

BIBLIOGRAFIE

AANDERAA, S.

[1] On the algebra of regular expressions. Appl. Math., Harvard Univ.; Cambridge, Jan.(1965), 1—18.

АГАСАНДМЯН, Г. А.

[1] Автоматы с переменной структурой. ДАН СССР **174** (1967), № 3, 529—530.

AHO, A.V.

[1] Nested stack automata J.ACM **16** (1969), 383—406.

AHO, V.A.; ULLMAN, J.D.

[1] The theory of languages. Math. Systems Theory **2** (1968), 97—125.

[2] A characterization of two-way deterministic classes of languages. J. Comput. System Sci. **4** (1970), 523—538.

AHO, A.V.; HOPCROFT, J.E.; ULLMAN, J.D.

[1] On the computational power of pushdown store systems. Information and Control, **13**, (1968), 186—206.

AHO, A.V.; ULLMAN, J.D.; HOPCROFT, J.E.

[1] On the computational power of pushdown automata. J. Comput. System Sci. **4** (1970), 129—136.

АИЗЕРМАН, М. А.; ГУСЕВ, Л. А.; РОЗОНОЭР, Л. И.; СМИРНОВА, И. М.; ТАЛЬ, А.А.

[1] Алгоритмическая неразрешимость проблемы распознавания преставимости рекурсивных событий в конечных автоматах. Автоматика и Телемеханика, 1962, № 11.

[2] Лóгика, автоматы, алгоритмы. Государственное изд. Физико-Мат. литературы, Москва, 1963.

AMAR, V.; PUTZOLU, G.

[1] On a family of linear grammars. Information and Control, **7** (1964), 283—291.

[2] Generalizations of regular events. In „Automata Theory" (E.R. Caianiello, ed.) Academic Press Inc., New York-London, 1966, 1—5.

ARBIB, M.A.

[1] Turing machines, finite automata and neural nets. J. ACM **8** (1961) no.4.

[2] Monogenic normal systems are universal. J. Austral. Math. Soc. 3,Part. 3 (1963), 301—306.

[3] Brains, machines and mathematics. McGraw-Hill Book Co., New York 1964.

[4] A common framework for automata theory and control theory. J. SIAM Control, Ser.A, 3, (1965) 206—222.

[5] A simple self-reproducing universal automaton. Information and Control **9** (1966), 177—189.

[6] Automata theory and control theory — a rapprochement. Automatica 3 (1966), 161—189.

[7] Speed-up theorems and incompleteness theorems. In „Automata Theory" (E.R. Caianiello ed.) Academic Press Inc., New York 1966, 6—24.

[8] Automata theory and development. Part. I. J. Theoret. Biol., 14 (1967), 131—156.

[9] Tolerance automata. Kybernetika (Praha) 3(1967), 223—233.

[10] Automaton automorphisms. Information and Control 11 (1967), 147—154.

[11] The algebraic theory of machines, languages, and semigroups. Academic Press, New York-London, 1968.

[12] Automaton decompositions and semigroup extensions. In „The algebraic theory of machines, languages, and semigroups", (M.A. Arbib, ed.) Academic Press Inc., New York 1968.

[13] The automata theory of semigroup embeddings. J. Australian Math. Soc. 8 (1968), part. 3, 568—570.

[14] Theories of abstract automata. Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, N.J. 1969.

[15] Automata theory. Topics in Mathematical System Theory. Mc. Graw-Hill, New York, 1969, 163—233.

ARBIB, M.A.; BLUM, M.

[1] Machine dependence of degrees of difficulty. Proc. Amer. Math. Soc. 16 (1965), 442—447.

ARBIB, M.A.; GIVE'ON, Y.

[1] Algebra automata I: Parallel programming as a prolegomena to the categorical approach. Information and Control 12 (1968), 331—345.

ARBIB, M.A.; RHODES, J.L.; TILSON, B.T.

[1] Complexity and group complexity of finite-state machines and finite semigroup. In „The Algebraic, theory of machines, languages and semigroups". (M.A. Arbib, ed.) Academic Press, Inc. New York 1968, 127—145.

ARDEN, D.N.

[1] Delayed logic and finite state machines. In „Theory of Computing Machine Design", Univ. of Michigan Press, Ann-Arbor 1960, 1—35.

ARMSTRONG, D.B.

[1] A programmed algorithm for assigning internal codes to sequential machines. IRE Trans. Electr. Comp. EC—11 (1962), 466—472.

[2] On the efficient assignment of internal codes to sequential machines. IRE Trans. Electr. Comp. EC—11 (1962), 611—622.

[3] Sequential circuits. Part. A: Structural properties. IEEE Trans. Circuit Theory CT—11 (1964), 25—27.

ASSER, G.

[1] Uber eine Darstellung der rekursiven Wortfunktionen in endlichen Automaten. Z. Math. Logik Grundl. Math. 12 (1966), 1—12.

АТАМОВ, Ф. А.

[1] Об одном методе синтеза абстрактных конечных асинхронных автоматах. Тр. вычисл. центра АН Азерб. ССР 3 (1965), 20—29.

AUFENKAMP, D.D.

[1] Analysis of sequential machines II. IRE Trans. Electr. Comp. EC—7 (1958), 299—306.

AUFENKAMP, D.D.; HOHN, F.E.

[1] Oriented graphs and sequential machines. Bell Labs. Reports, 30, 1954.

[2] Analysis of sequential machines. IRE Trans. Electr. Comp. EC-6 (1957), 276—285.
AXT, P.
[1] On a subrecursive hierarchy and primitive recursive degrees. Trans. of Amer. Math. Soc. 92 (1959), 85—105.
BABCSÁNYI, I.
[1] A félperfekt kváziaotomatákról. Matematikai Lapok, 21 (1970), 95—102.
BANERJI, R.B.
[1] Phrase strukture languages, finite machines and channel capacity. Information and Control, 6, (1963), 153—162.
BAR-HILLEL, Y.
[1] Language and information. Addison-Wesley Publ. Comp., Reading (Mass.), 1964.
BAR-HILLEL, Y.; SHAMIR, E.
[1] Finite state languages. Bull. Res. Council Israel, F 8 (1959), 155—166.
BAR-HILLEL, Y.; GAIFMAN, C.; SHAMIR, E.
[1] On categorial and phrase structure grammars. Bull. Res. Council Israel, F 9 (1960), 1—16.
BAR-HILLEL, Y.; PERLES, M.; SHAMIR, E.
[1] On formal properties of simple phrase structure grammars. Z.f. Phonetik, Sprachwissenschaft u. Kommunikationsforschung 14 (1961), 143—172.
BARNES, B.H.
[1] Groups of automorphisms and sets of equivalence classes of input for automata. J.ACM 12 (1965), 561—565.
[2] On the group of automorphisms of strongly connected automata. Math. Systems Theory 4 (1970), 289—294.
BARNES, B.H.; FITZGERALD, J.M.
[1] Minimal experiments for imput-independent machines. J. ACM 14, (1967), 683—686.
БЛОХ, А. Ш.
[1] Эквивалентные преобразования последовательностных машин. Автоматика и Телемеханика, 21 (1960).
БАРЗДИНЬ, Я. М.
[1] Емкость среды и поведение автоматов, ДАН СССР 160, № 2 (1965), 302—305.
[2] О расшифровке автоматов, сб. «Проблемы кибернетики», вып. 21, «Наука», 1969, 103—114.
БАРЗДИНЬ, Я. М.; КОРШУНОВ, А. Д.
[1] О диаметре приведенных автоматах. Дискретный Анализ, 9 (1967), 3—45.
BAVEL, Z.
[1] On the total length of an experiment I. Switching Circuit Theory and Logical Design, Inst. of Electric. and Electron. Engng., New York, 1964, 234—248.
[2] On the structure and automorphisms of finite automata. Doctoral Diss., Univ. of Illinois 1965.
[3] The source as a tool in automata. Information and Control 18 (1971), 140—155.
[4] Connectivity and separation in automata In „Theory of machines and computations" (Z. Kohavi and A. Paz, eds.) Academic Press, New York, London, 1971, 255—274.
BAVEL, Z.; MULLER, D.E.
[1] Reversibility in monadic algebras and automata. Switching Circuit Theory and Logic. Design (IEEE Conf. Rec.), New York 1965, 242—247.

[2] Connectivity and reversibility in automata. J. ACM 17, 1970, 231—240.
BAZILEVSKII, YU. YA.

[1] The theory of mathematical machines. Pergamon Press, New York 1963.
BEATTY, J.C.

[1] On some properties of the semigroup of a machine which are preserved under state minimization. IBM Res. Rep. RC, 1964, 1199.

[2] On some properties of the semigroup of a machine which are preserved under state minimization. Information and Control 11 (1967), 290—316.
BEATTY, J.C.; MILLES, R.E.

[1] Some theorems for incompletely specified sequential machines with application to state minimization. Switching Circuit Theory and Logic. Design, New York 1963.
BELLMAN, R.

[1] Sequential machines, ambiguity and dynamic programming. J. ACM 7 (1960), 24—28.
BELLMANN, K.; GÖSSEL, M.

[1] Versuch einer automaten theoretischen Beschreibung von Selektionsprozessen. Acta Cybernet. 1 (1971), 93—96.
BERGE, C.

[1] Graphes et hypergraphes. Dunod, Paris 1970.
BERMAN, G.T.

[1] Every finite sequential machine is linearly realizable. In „Theory of machines and computations" (Z. Kohavi and A. Paz, eds.) Academic Press, New York, London, 1971, 209—227.
BIRKHOFF, G.

[1] Lattice theory. Amer. Math. Soc. Colloquium Publications, Providence, Rhode Island 1968.
BÖHLING, K.H.

[1] Netzwerke — Schaltwerke — Automaten. Ein Überblich über die synchrone Theorie. 2. Colloquium über Schaltkreis - und Schaltwerktheorie ISNM Bd. 4, Birkhäuser Verlag, Basel 1963, 82—106.

[2] Zur Strukturtheorie sequentieller Automaten. Forschungsber. d. Landes Nordrhein-Westfalen, No. 1279, 1964.
BÖHLING, K.H.; INDEMARK, K.

[1] Endliche Automaten. I. Bibliographisches Institut, Mannheim-Vienna-Zürich, 1969.
БОНДАРЧУК, В. Г.

[1] О событиях, представимых в конечная автомате одним состоянием. Укр. Матем. Журнал 14 (1962) 190—191.

[2] Автоматы и события. Укр. Матем. Журнал, 14 (1962) 351—361.

[3] Системы уравнений в алгебре событий. Ж. вычисл. матем. и. матем. физика 3 (1963) 1077—1088.

[4] Анализ взвешенных графов методом решения системы уравнений в алгебре событий. В: Теория конечных и вероятностных автоматах. Изд. Наука, Москва, 1965, 246—249.

[5] Метрическое пространство событий. Кибернетика (Киев) 1965, № 1, 24—27, № 4, 22—30.
BOOTH, T.L.

[1] Sequential machines and automata theory. J. Wiley & Sons, New York, 1967.
БОРОДЯНСКИЙ, Ю. М.

[1] Эксперименты с конечными автоматами Мура, Кибернетика (Киев) 1965 № 6, 18—27.

[2] Некоторые замечания по поводу методики подсчета длины эксперимента для класса автоматов. В сб. Теория автоматов, Семинар, вып. 3 (1966), 33—35.

BOUCHET, A.

[1] An algobraic method for minimizing the number of states in an incompletely specified sequential machine. IEEE Trans. on Comp. C-17 (1968), 795—798.

BRAUER, W.

[1] Eine Bemerkung zur Zustandsreduktion unvollstandiger Automaten. Computing (Arch. Elektron. Rechnen) 5 (1970), 178—184.

[2] Zu den Grundlagen einer Theorie topologischer sequentieller systeme und Automaten. Gosellschaft für Mathematik und Datenverarbeitung, Bonn, 1970.

BROWN, F.M.

[1] Code transformations in sequential machines. IEEE Trans. Electr. Comp. EC-14 (1965), 822.

BRZOZOWSKI, J.A.

[1] A survey of regular expressions and their applications. IRE Trans. Electr. Comp. EC-11 (1962), 324—335.

[2] A survey of regular expressions and their applications. PGEC, 11 (1962), 324—335.

[3] Canonical regular expressions and minimal state graphs for definite events. Math. Theory of Automata, Polytechnic Press of the Polytechnic Inst. of Brooklyn, Brooklyn (N.J.) 1963, 529—561.

[4] Derivatives of regular expressions. J. ACM 11 (1964), 481—494.

[5] Regular expressions from sequential circuits. IEEE Trans. Electr. Comp. EC-13 (1964), 741—744.

[6] Regular expressions for linear sequential circuits. IEEE Trans. Electr. Comp. EC-14 (1965), 148—156.

[7] On single-loop realizations of automata. Switching Circuit Theory and Logic. Design (IEEE Conf. Rec.), New York 1965, 84—93.

[8] On simple-loop realizations of sequential machines. Information and Control 10 (1967), 292—314.

[9] Roots of star events. J. ACM, 14 (1967), 466—477.

BRZOZOWSKI, J.A.; DAVIS, W.A.

[1] On the linearity of autonomous sequential machines. IEEE Trans. Electr. Comp. EC-13 (1964), 673—679.

[2] On the linearity of sequential machines. IEEE Trans. Electr. Comp. EC-15 (1966), 21—29.

BRZOZOWSKI, J.A.; McCLUSKEY, E.J.

[1] Signal flow graph techniques for sequential circuit state diagrams. IEEE Trans. Electr. Comp. EC-12 (1963), 67—76.

[2] About signal flow graph techniques for sequential circuits. IEEE Trans. Electr. Comp. EC-13 (1964), 154.

BRZOZOWSKI, J.A.; POAGE, J.F.

[1] On the construction of sequential machines from regular expressions. IEEE Trans. Electr. Comp. EC-12 (1963), 402—403.

BRZOZOWSKI, J.A.; SINGH, S.

[1] Definite asynchronous sequential circuits. IEEE Trans. on Comp. C-17 (1968), 18—26.

BÜCHI, J.R.
[1] Regular canonical systems and finite automata. Univ. Mich. Res. Ins. Tech. Rept. 03105, 2794—7—T, 1959.
[2] Weak second-order arithmetic and finite automata. Z. Math. Logik Grundlagen Math., 6 (1960), 66—92.
[3] Mathematische Theorie des Verhaltens endlicher Automaten. Z. angew. Math. u. Mech. 42 (1962), Sonderheft, 9—16.
[4] Regular canonical systems. Arch. Math. Logic Grundlagenforsch. 6 (1964), 91—111.
BÜCHI, J.R.; ELGOT, C.C.; WRIGHT, J.B.
[1] The non-existence of certain algorithms in finite automata theory (Abstract), Notices Amer. Math. Soc. 5 (1958), 98.
BUCUR, I.
[1] Algebra omologică, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1965.
BUDACH, L.; HOEHNKE, H.J.
[1] Algebraische Automatentheorie. Mathematischer Seminar der Humboldt Universitat, Berlin, 1969.
BURKHARD, H.D.
[1] Über Experimente an nichtdeterministichen Automaten. Diplom-Arbeit, Inst. f. Math. Logic der Humboldt Univ., Berlin 1968.
BURKS, A.W.
[1] The logic of fixed and growing automata. Intern. Symposium on the Theory of Switching. (Proc. 1957) v. 29, part. 1, 147—188.
[2] Computation, behaviour and structure in fixed and growing automata. Bahav. Sci. **6**, (1961), 5—22.
BURKS, A.W.; WANG, H.
[1] The logic of automata. J. ACM 4 (1957), 193—218; 279—297.
БУЗУРХРАНОВ, В.
[1] Об одном методе перехода от матричных форм задания конечных автоматов к табличных и обратно. Вопросы кибернетики и вычисл. матем. (Ташкент) 4 (1966), 58—66.
CADDEN, W.J.
[1] Equivalent sequential circuits. IRE Trans. Circuit Theory CT-6 (1959), 30—34.
CAIANELLO, E.R. (Ed).
[1] Automata Theory. Academic Press, New York, 1966.
CANNONITO, F.B. (Ed).
[1] Logic, computability and automata. Thomson Book Co., Washington 1967.
CĂRĂUŞU, A.
[1] On equivalent and ambiguous linear bounded acceptors. Lucrările Congresului Internat. de Logică, Filosofie şi metodologia ştiinţelor, Bucureşti, 1971 (sub tipar).
CĂZĂNESCU, V.E.
[1] Despre categoria automatelor secvenţiale abstracte. An. Univ. Bucureşti, **16**, No. 1 (1967), 31—37.
[2] Despre categoria cvasimaşinilor. Stud. Cerc. Mat. **20** (1968), 669—681.
ČERNY, J.
[1] O analyze neinicialnych automatov. Kybernetika (Praha) **2** (1966), 300—304.
[2] Synthesis of non-initial automata. Kybernetika (Praha) 3 (1967), 346—351.

CHOMSKY, N.

[1] Three models for the description of language. IRE Trans. Inform. Theory IT-2 (1956), 113—124.

[2] Syntactic structures. Mouton & Co, Gravenhage, 1957.

[3] On certain formal properties of grammars. Information and Control 2 (1959), 137—167.

[4] Context-free grammars and pushdown storage. M.I.T. Res. Lab. Electron. Quart. Prog. Rept. 65, 1962, 187—194.

[5] Formal properties of grammars. Handbook of Math. Psychology, vol. 2, J. Wiley, New York (1963), 323—418.

CHOMSKY, N.; MILLER, G.A.

[1] Finite state languages. Information and Control 1 (1958), 91—112.

CHOMSKY, N.; SCHÜTZENBERGER, M.P.

[1] The algebraic theory of context-free languages. In: „Computer Programming and Formal Systems" (P. Braffort and D. Hirschberg, eds.) North-Holland Publ., Amsterdam, 1963, 118—161.

CHURCH, A.

[1] An unsolvable problem of elementary number theory. Amer. J. Math. 58 (1936), 345—363.

CLIFFORD, A.H.; PRESTON, C.B.

[1] The algebraic theory of semigroups, vol. I. American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, 1961.

COHN, M.

[1] Controllability in linear sequential circuits. IRE Trans. Circuit Theory CT-9 (1962), 74—78.

[2] A theorem on linear automata. IEEE Trans. Electr. Comp. EC-13 (1964), 52—53.

[3] Properties of linear machines. J. ACM 11 (1964), 296—301.

COHN, M.; EVEN, S.

[1] Identification and minimization of linear machines. IEEE Trans. Electr. Comp. EC-14 (1965), 367—376.

COHN, P.M.

[1] Universal Algebra. Harper & Row, New York and John Weatherhill, Inc., Tokyo, 1965

COLE, S.N.

[1] Real-time computation by iterative arrays of finite-state machines. IEEE Conference Record of Seventh Annual Symp. on Switching and Automata Theory, Berkeley, Calif. 1964, 53—77.

COPI, I.; ELGOT, C.; WRIGHT, J.

[1] Realization of events by logical, nets. J. ACM, 5 (1958), 181—196.

COWAN, J.D.

[1] Synthesis of reliable automata from unreliable components. Automata Theory, Academic Press, New York-London 1966, 131—145.

CREANGĂ, I.; REISCHER, C.

[1] Algebra liniară. Ed. II-a. Editura didactică și Pedagogică, București, 1970.

ČULIK, I.K.

[1] Some notes on finite-state languages and events represented by finite automate using labelled graphs. Časopis pro pest. Mat. 86 (1961), 43—55.

ČULIK, II., K.

[1] Construction of the automaton mapping. Appl. Mat. 10 (1965), 459—468.

CURTIS, H.A.
[1] Multiple reduction of variable dependency of sequential machines J.ACM 9 (1962), 324—344.
[2] Use of decomposition theory in the solution of the state assignment problem of sequential machines. J.ACM 10 (1963), 386—412.
CUTLIP, W.F.
[1] On the cascade decomposition of prefix automata. IEEE Trans. Elec. Comp. EC-17 (1968), 94—95.
[2] Amendments to Zeiger's cascade synthesis of finite-state machines. Information and Control 12 (1968), 499—507.
DALEN, D. van
[1] Fans generated by nondeterministic automata. Z. Math. Logik Grundl. Math. 14 (1968), 273-278.
DAUBER, P.S.
[1] An analysis of errors in finite automata. Information and Control 8 (1965), 295—303.
DAVIS, M.
[1] Computability and unsolvability. McGraw-Hill Book Co., New York 1958.
DAVIS, W.A.
[1] An introduction to linear sequential machines. Dept. of Electr. Engrg. Univ. of Ottawa, Ontario, Canada, Techn. Rept. No. 63—2, February, 1963.
DEJEAN, F.; SCHÜTZENBERGER, M.P.
[1] On a question of Eggan. Information and Control 9 (1966), 23—25.
DEUSSEN, P.
[1] Zur Synthese von Automaten. Colloquium über Schaltkreis-and Schaltwerktheorie, (Bonn 1960), ISNM Bd. 3, Birkhäuser-Verlag, Basel-Stuttgart 1961, 96—113.
[2] On the algebraic theory of finite automata. ICC Bulletin 4 (1966), 231—264.
DOLOTTA, T.A., McCLUSKEY, E.J.
[1] The coding of internal states of sequential circuits. IEEE Trans. Electr. Comp. EC-13 (1964), 549—562.
ДУШИНСКИЙ, В. А.
[1] О характеристических экспериментах с автоматами, сб. «Проблемы кибернетики» вып. Физматгиз 1964, 257—262.
EGGAN, L.C.
[1] Transition graphs and starheight of regular events. Michigan Math. J. 10 (1963), 385—397.
EILENBERG, S.; WRIGHT, J.B.
[1] Automata in general algebras. Information and Control 11 (1967), 452—470.
ELGOT, C.C.
[1] The non-existence of certain finite automata design algorithms. In Advanced Theory of Logical Design of Digital Computers. The Univ. of Michigan Press, Ann Arbor, Mich., 1958.
[2] Lectures on switching and automata theory. Techn. Report, Univ. Michigan Res. Inst., 1959.
[3] Decision problems of finite-state machines. Trans. Amer. Math. Soc., 97, 21 (1960).
[4] Decision problems of finite automata design and related arithmetics. Trans. Amer. Math. Soc. 98 (1961), No. 4, 21—51.
ELGOT, C.C.; MEZEI, J.
[1] Two sided finite transductions. IBM Research Paper RC—1017 (1963)

[2] On relations defined by generalized finite automata. IBM J. Res. Dev. 9 (1965), 47—68.
ELGOT, C.C.; RUTLEDGE, J.D.
[1] Operations on finite automata. Switching Circuit Theory and Logic Design (Conf. Rec.) New York 1962.
[2] Machine properties preserved under state minimization. Switch. Circuit Theory and Logic. Design (Conf. Rec.) New York 1963.
ELSPAS, B.
[1] The theory of autonomous linear sequential networks. IRE Trans. Electr. Comput. 6 (1959), 45—60.
ЕРШОВА, Э. Б.
[1] Способ оптимального кодирования внутренных состояний конечного автомата. Пробл. передачи информации 17 (1964) 70—84.
EVEN, S.
[1] Rational numbers and regular events. IEEE Trans. Electr. Comp. EC-13 (1964), 470—471.
[2] Test for synchronizability of finite automata and variable lenght codes. IEEE Trans. Information Theory IT-10 (1964), 185—189.
[3] On information lossless automata of finite order. IEEE Trans. Electr. Comp. EC-14 (1965), 561—569.
EVEY, R.J.
[1] The theory and application of pushdown store machines. Mathematical Linguistic and Automatic Translation, Harvard Univ. Computation Lab. Rept. NSF-10, 1963.
FARR, E.H.
[1] Lattice properties of sequential machines. J.ACM 10 (1963), 365—385.
FEDER, J.
[1] Languages, automata and classes of chain-encoded patterns. NYU Technical Report No. 400—147 Depart. of Electr. Engineering, New York Univ., Bronx., N.Y. 10454, 1967.
[2] Languages of encoded line patterns. Information and Control, 13 (1968), 230—244.
FEICHTINGER, G.
[1] Some results on the relations between automata and their automorphism groups. Computing 1 (1966), 327—340.
[2] Beiträge zur Theorie abstrakter Automaten. Elektronische datenverarbeitung 8 (1967), 361—366.
[3] Über die Anzahl aller nichtisomorphen transitiven Automaten von Primzahlordnung. Elektron. Inform. verarb. u. Kybernetik 3 (1967), 275—282.
[4] Über isomorphe Unterautomaten in abstrakten Automaten. Elektronische datenverarbeitung 8 (1967), 411—415.
[5] Der Quotientenautomat nach einem direkten Faktor einer Automorphismengruppe. Computing 3 (1968), 1—8.
FISCHER, P.C.
[1] On computability by certain classes of restricted Turing machines. Proceeding Fourth Annual Symp. on Switching Circuit Theory an Logical Design Chicago III. 1963 ,23—32.
[2] Multi-tape and infinite-state automata — A survey. Comm. A.C.M. 8 (1965), 799—805.
[3] Turing machines with restricted memory access. Information and Control, 9, (1966), 364—379.

FLECK, A.C.
[1] Preservation of structure by certain classes of functions on automata and related group theoretic properties. Comp. Lab. of Michigan State Univ. 1961 (preprint).
[2] Isomorphism groups of automata. J. ACM 9 (1962), 469—476.
[3] On the automorphism group of an automaton. J. ACM 12 (1965), 566—569.
[4] On the strong connectedness of the direct product. IEEE Trans. Electr. Comp. EC-16 (1967), 90.
FRANK, H.; YAN, S.S.
[1] Improving reliability of a sequential machine by error-correcting state assignments. IEEE Trans. Elect. Comp. EC-15 (1966), 111.
FREEMAN, H.
[1] Discrete-time systems. J. Wiley & Sons, New York, 1965.
FREY, T.
[1] Über die Konstruktion nicht vollständiger Automaten. Acta Math. Acad. Sci. Hungar 15 (1964), 375—381.
[2] Über die Konstruktion endlicher Automaten. Acta Math. Acad. Sci. Hungar. 15 (1964), 383—398.
FRIEDLAND, B.
[1] Linear modular sequential circuits. IRE Trans. Electr. Comput. CT-6 (1959), 61—68.
FRIEDMAN, J.
[1] A decision procedure for computations of finite automata. J.ACM, 9 (1962), 315—323.
GABRIELIAN, A.
[1] The theory of interacting local automata. Information and Control 16 (1970), 360—377.
GALBURĂ, GH.
[1] Algebră. Editura didactică şi pedagogică, Bucureşti 1972.
GALLAIRE, H.
[1] Decomposition of linear sequential machines. II. Math. Systems Theory 4 (1970), 168—190.
GALLAIRE, H.; HARRISON, M.A.
[1] Decomposition of linear sequential machines. Math. Systems Theory 3 (1969), 246—287.
ГАВРИЛОВ, М. А.
[1] Современное состояния теорий релейных устройств и конечных автоматах. В: Теория конечных и вероятностных автоматах. Изд. Наука, Москва, 1965, 17—39.
GÉCSEG, F.
[1] On R-products of automata. Studia Sci. Math. Hung. 1 (1966), I, 437—441; II, 443—447; III ibid. 2 (1967), 163—166.
[2] On complete systems of automata. Acta Sci. Math. 30 (1969), 295—300.
GÉCSEG, F.; PEÁK, I.
[1] Az automaták algebrai elmelete. Matematikai Lapok 17 (1966), 77—134.
[2] Algebraic theory of automata. Akadémiai Kiadó, Budapest 1972.
GHIRON, H.
[1] Rules to manipulate regular expressions of finite automata. IRE Trans. Electr. Comp. EC-11 (1962), 574—575.
GILBERT, E.N.
[1] The number of internal state assignments for a sequential machine. Internal Tech. Mem. MM-59—121—4, Bell Telephone Lab., 1959.

GILL, A.
[1] Comparison of finite state models. IRE Trans. Circuit Theory CT-7 (1960), 178—179.
[2] State-identification experiments in finite automata. Information and Control 4 (1961), 132—154.
[3] A note on Moore's distinguishability theorem. IRE Trans. Electr. Comp. EC-10 (1961), 290—291.
[4] Cascades finite-state machines. IRE Trans. Electr. Comp. EC-10 (1961), 366—370.
[5] Introduction to the theory of finite-state machines. McGraw-Hill Book Comp., New York 1962.
[6] Analysis of linear sequential circuits by confluence sets. IEEE Trans. Electr. Comput. EC-13 (1964), 226—231.
[7] Analysis and synthesis of stable linear sequential circuits. J.ACM 12 (1965), 141—149.
[8] On the bound to the memory of a sequential machine. IEEE Trans. Electr. Comp. EC-14 (1965), 464—466.
[9] The reduced form of a linear automaton. Automata Theory, Academic Press, Inc., New York, — London 1966, 164—175.
[10] State graphs of autonomous linear automata. Automata Theory, Academic Press. Inc., New York-London, 1966, 176—180.
[11] Realization of input-output relations by sequential machines. J.ACM 13 (1966), 33—42.
[12] On the series-to-parallel transformation of linear sequential circuits. IEEE Trans. Electr. Comp. EC-15 (1966), 107.
[13] Linear sequential circuits-analysis, synthesis and application. McGraw-Hill Book Co., New York 1967.
GILLESPIE, R.G.; AUFENKAMP, D.D.
[1] On the analysis of sequential machines. IRE Trans. Electr. Comput. EC-7 (1958), 119—122.
GINSBURG, S.
[1] On the length of the smallest uniform experiment which distinguishes the terminal state of the machine. J.ACM 5 (1958) 266—280.
[2] On the reduction of superflous states in a sequential machines. J.ACM 6 (1959), 259—282.
[3] A synthesis technique for minimal-state sequential machines. IRE Trans. Electr. Comp. EC-8 (1959), 13—24.
[4] A technique for the reduction of a given machine to a minimal-state machine. IRE Trans. Electr. EC-8 (1959), 346—355.
[5] Synthesis of minimal-state sequential machines. IRE Trans. Electr. Comp. EC-8 (1959), 441—448.
[6] Connective properties preserved in minimal-state machines. J.ACM 7 (1960) 311—325.
[7] Some remarks on abstract machines. Trans. Amer. Math. Soc. 96 (1960), 400—444.
[8] Set of tapes accepted by different types of automata. J. ACM 8 (1961), 81—86.
[9] Examples of abstract machines. IRE Trans. Electr. Comp. EC-11 (1962), 132—135.
[10] An introduction to mathematical machine theory. Addison-Wesley Publ. Co., Inc., Reading, Mass-Palo Alto, Calif. London, 1962.
[11] The mathematical theory of context-free language. McGraw-Hill Book Co., New York 1966.
GINSBURG, S.; GREIBACH, S.A.
[1] Mappings which preserve context-sensitive languages. Information and Control, 9 (1966), 563—582.

[2] Deterministic context-free languages. Information and Control, 9 (1966), 620—648.
[3] Abstract families of languages. IEEE Conference Record of Eighth Annual Symposium on Switching and Automata Theory, Austin, Texas, 1967.
GINSBURG, S.; HARRISON, M.
[1] On the closure of AFL under reversal. Information and Control 17 (1970), 395—409.
GINSBURG, S.; HIBBARD, T.N.
[1] Solvability of machine mappings of regular sets to regular sets. J. ACM 11 (1964), 302—312.
GINSBURG, S.; HOPCROFT, J.E.
[1] Two-way balloon automata and AFL's. SDC Document TM 738/042/00, 1968.
[2] Two way boolean automata and AFL. J. ACM 17 (1970), 3—13.
GINSBURG, S.; RICE, H.G.
[1] Two families of languages related to ALGOL. J. ACM, 9 (1962), 350—371.
GINSBURG, S.; ROSE, G. F.
[1] Some recursively unsolvable problems in ALGOL-like languages. J. ACM, 10 (1963), 29—47.
[2] Operations which preserve definiability in languages. J. ACM, 10 (1963), 175—195.
[3] A characterization of machine mappings. Canad. J. Math. 18 (1966), 381—388.
[4] Preservation of languages by transducers. Information and Control 9 (1966), 153—176.
[5] A note on preservation of languages by transducers. Information and Control 12 (1968), 549—552.
GINSBURG, S.; SPANIER, E.H.
[1] Quotiens of context-free languages. J. ACM, 10 (1963), 487—492.
[2] Bounded ALGOL-like languages. Trans. Amer. Math. Soc. 113 (1964), 336—368.]
[3] Semigroups, Presburger formulas and languages. Pacific J. Math, 16 (1966), 285—296.
[4] Bounded regular sets. Proc. Amer. Math. Soc., 117, No. 5 (1966), 1043—1049.
[5] Control sets on grammars. SDC Document 738/936/00, 1967.
GINSBURG, S.; ULLIAN, J.
[1] Ambiguity in context-free languages. J. ACM, 13 (1966), 62—88.
GINSBURG, S.; GREIBACH, S.A.; HARRISON, M.A.
[1] Stack automata and computing. J. ACM, 14 (1967), 172—201.
[2] One-way stack automata. J. ACM, 14 (1967), 389—418.
GINSBURG, S.; GREIBACH, S.A.; HOPCROFT, J.E.
[1] Pre -AFL. SDC Document TM 738/037/00, 1967.
GINZBURG, A.
[1] About some properties of definite, reserve-definite and related automata. IEEE Trans. Electr. Comp. EC-15 (1966) 806—810.
[2] A procedure for checking the equality of regular expressions. J. ACM, 14 (1967), 355—362.
[3] Algebraic theory of automata. Academic Press, New York-London, 1968.
GINZBURG, A.; YOELI, M.
[1] On homomorphic images of transition graphs. J. Franklin Institute 278 (1964), 291—296.
[2] Products of automata and the problem of covering. Trans. Amer. Math. Soc. 116 (1965) 253—266.
GIVE'ON, Y.
[1] The theory of algebraic automata. I: Morphisms and regular systems. Techn. Inf. Univ. Michigan, Ann Arbor 1964.

[2] On some properties of the free monoids with applications to automata theory. J. Computer System. Sc. 1 (1967), 137—155
[3] A categorical review of algebra automata and systems theories. Symposia Mathematica, vol. IV (INDAM, Rome, 1968/69). Academic Press London, 1970, 515—523.
[4] Algebraic theory of m-ARY systems. In „Theory of machines and computations" (Z. Kohavi and A. Paz, eds.) Academic Press, New York, London, 1971, 275—286.

GIVE'ON, Y.: ARBIB, M.A.

[1] Algebra automata II. The categorical framework for dynamic analysis. Information and Control, 12 (1968), 346—370.

ГЛЕБСКИЙ, Ю. В.

[1] Кодирование с помощью конечных автоматов. ДАН СССР **141** (1961), № 5, 1054—1057.
[2] Осуществимые последовательности в конечных автоматах, сб. «Проблемы кибернетики», вып. 5. Физматгиз, 1961, 279—282.

ГЛЕБСКИЙ, Ю. В.; ДУЧИГ, А. М.; КОГАН, М. И.; ЛИОГОНСКИЙ, М. И.; МАРКОВ, Ал.

[1] Алгоритмы осуществляемые повторяющимся применениями конечных автоматов. Проб. Кибернетики **13** (1965), 241—244.

ГЛУШКОВ, В. М.

[1] Об одном методе анализа абстрактных автоматов. ДАН СССР (1960), № 9, 1151—1154.
[2] Об одном алгоритме синтеза абстрактных автоматов. Укр. Матем. Журн. 12, (1960), № 2, 147—156.
[3] Абстрактные автоматы и разбиение свободных полугрупп. ДАН СССР **136** (1961), № 4, 765—767.
[4] Некоторые проблемы синтеза цифровых автоматов. Вычисл. матем. и матем. физика **1** (1961), 371—411.
[5] Синтез цифровых автоматов. Физматгиз, Москва, 1962.

ГОРБОВИЦКАЯ, Н. А.

[1] Эквивалентные преобразования автоматов некоторых типов. Пробл. Кибернетики **12** (1964), 5—28.

GRASSELLI, A.; LUCCIO, F.A.

[1] A method for minimizing the number of internal states in incompletely specified sequential machines. IEEE Trans. Electr. Comp. EC-14 (1965), 350—359.

GRÄTZER, G.

[1] Lattice Theory. First concepts and distributive lattices. W.H. Freeman and Co., San Fancisco, 1971.

GRAY, J.N.; HARRISON, M.A.

[1] The theory of sequential relations. Information and Control, 9 (1966), 435—468.

GRAY, J.N.; HARRISON, M.A.; IBARRA, O.

[1] Two-way pushdown automata. Information and Control, 11 (1967), 30—70.

GREIBACH, S.A.

[1] The undecidability of the ambiguity problem for minimal linear grammars. Information and Control, 6 (1963), 117—125.
[2] A new normal form theorem for context-free phrase structure [grammars, J. ACM, 12 (1965), 42—52.
[3] The unsolvability of the recognition of linear context-free languages. J. ACM, 13 (1966), 582—587.

[4] A note on pushdown store automata and regular systems. Proc. Amer. Math. Soc. 18 (1967), 263—268.
[5] A note on undecidable properties of formal languages. SDC Document MT 738/038/00, 1967.
[6] Checking automata and one-way stack languages. SDC Document TM 738/045/00, 1968
GREIBACH, S.A.; HOPCROFT, J.E.
[1] Independence of AFL operations SDC Document TM 738/034/00, 1967.
GRENANDER, U.
[1] Can we look inside an unreliable automaton? Res. Papers Statist., Festschrift J. Newman 1966, 107—123.
ГРИНБЕРГ В. С.
[1] Некоторые новые оценки в теории конечных автоматов, ДАН СССР 166, №. 5, (1966), 1066—1068.
[2] Детерминизация систем графов и синтез конечных автоматов, Сиб. Матем. журнал. 7, № 6 (1966), 1259—1267.
ГРИНБЕРГ В. С.; КОРШУНОВ А. Д.
[1] Об асимптотическом поведении максимума веса конечного дерева, Проблемы передачи информации 2, вып. I (1966), 96—99.
GROSS, M.
[1] Inherent ambiguity of minimal linear grammars. Information and Control, 7 (1964), 366—368.
HAINES, L.H.
[1] Note on the complement of a (minimal) linear language. Information and Control, 7 (1964), 307—314.
[2] Generation and recognition of formal languages. Doctoral Thesis MIT, Cambridge, Massachusetts, 1965.
HALL, M.
[1] The theory of groups. Macmillan, New York, 1959.
HÄNDLER, W.
[1] Einfache diagnostiche Experimente bei endlicher Automaten. 3. Colloquium über Automatentheorie, ISNM Bd. 6, Birkhäuser-Verlag, Bassel-Stuttgart 1967, 56—75.
HARARY, F.; PALMER, E.
[1] Enumeration of finite automata. Information and Control 10 (1967), 499—508.
HARING, D.R.
[1] Some aspects of the state assignment problem for sequential circuits. MIT Electron. System Lab. Rept. FSL-TR-147, Sept. 1962.
HARRISON, M. A.
[1] Introduction to switching and automata theory. McGraw-Hill Book Co., New York 1965.
[2] A ceusus of finite automata. Canad. J. Math. 17 (1965), 100—113.
[3] On the error correcting capacity of finite automata. Information and Control 8 (1965), 430—450.
[4] On asymptotic estimates in switching and automata theory. J. ACM 13 (1966), 151—157.
[5] On equivalence of state-assignments. IEEE Trans. on Comp. C-17 (1968), 55—57.
HART,, J. F.; TAKASU, S. (eds).
[1] Techniques for manipulating regular expressions. Proc. Conf. Systems and Comput Sci., Univ. of Western Ontario, September 1965, Univ. of Toronto Press, Toronto 1965.

HARTMANIS, J.

[1] Symbolic analyses of a decomposition of information processing machines. Information and Control, 3 (1960) 154—178.

[2] On the state-assignment problem for sequential machines I. IRE Trans. Electr. Comp. EC-10 (1961), 157—165.

[3] Maximal autonomous clocks of sequential machines. IEEE Trans. Electr. Comp. EC-11 (1962), 83—85.

[4] Loop-free structure of sequential machines. Information and Control, 5 (1962) 25—43.

[5] The equivalence of sequential machine models. IEEE Trans. Electr. Comp. EC-12 (1963), 18—19.

[6] Further results on the structure of sequential machines. J. ACM 10 (1963), 78—88.

[7] Two tests for the linearity of sequential machines. IEEE Trans. Electr. Comp. EC-14 (1965) 781—786.

[8] Context-free languages and Turing machine computations. Proceedings of Symposia in Applied Mathematics, 19, Amer. Math. Soc., Providence, Rhode Island 1967.

[9] On the complexity of undecidable problems in automata theory. IEEE Conference Record of Eighth Annual Symposium on Switching and Automata Theory, Austin, Texas, 1967, 112—116.

[10] Computational complexity of one-tape Turing machine computations J. ACM, 15 (1968), 325—339.

[11] A note on one-way and two-way automata. Math. Systems Theory 4 (1970), 24—28.

HARTMANIS, J.; DAVIS, W.A.

[1] Homomorphic images of linear sequential machines. J. Computer System Sciences 1 (1967), 155—156.

HARTMANIS, J.; HOPCROFT, J.E.

[1] What makes some language theory problems undecidable. J. Comput. System Sci. 4 (1970), 368—376.

HARTMANIS, J.; SHANK, H.

[1] On the recognition of primes by automata. J. ACM, 15 (1968), 382—389.

HARTMANIS, J.; STEARNS, R.E.

[1] On the state assignment problem for sequential machines II. IRE Trans. Electr. Comp. EC-10 (1961), 593—603.

[2] Some dangers in state reduction of sequential machines. General Electric Research Lab. Rep. 62-RL-3070E, Schenecdaty, N. Y., July 1962.

[3] Some dangers in state reduction of sequential machines. Information and Control, 5 (1962), 252—260.

[4] A study of feedback and errors in sequential machines. IEEE Trans. Elec. Comp. EC-12 (1963), 223—232.

[5] Regularity preserving modifications of regular expressions. Information and Control, 6 (1963), 55—69.

[6] Pair algebra and its application to automata theory. Information and Control 7 (1964), 485—507.

[7] Computational complexity of recursive sequences. Proceedings of the Fifth Annual Symposium on Switching Circuit Theory and Logical Design, Princeton, New Jersey 1964, 82—90.

[8] On the computational complexity of algorithms. Trans. Amer. Math. Soc. **117** (1965), 285—306.

[9] Algebraic structure theory of sequential machines. Prentice-Hall Inc., Englewood Cliffs (N. J.) 1966.

[10] Sets of numbers defined by finite automata. Amer. Math. Monthly **74** (1967), 539—542.
HARTMANIS, J.; LEWIS, P.M. II,; STEARNS, R.E.

[1] Hierarchies of memory limites computations. IEEE Conference Record of Switching Circuit Theory and Logical Design. Ann Arbor, Michigan, 1965, 82—90.
HAVEL, I.M.

[1] The theory of regular events. I, II. Kybernetika, Prague, **5** (1969), 400—419; 520—544.
HAZELTINE, B.

[1] Regular expressions and variable lenght encodings. IEEE Trans. Information Theory IT-9 (1963), 48.
HEDETNIEMI, S.T.

[1] Homomorphisms of graphs and automata. Univ. of Michigan Tech. Report, ORA Projects 03105 and 07363, 1966.
HENNIE, F.C.

[1] One-tape, off-line Turing machine computations. Information and Control, **8** (1965), 553—578.

[2] Finite-state models for logical machines. John Wiley & Sons, Inc., New York 1968.
HENNIE, F.C.; STEARNS, R.E.

[1] Two-tape simulation of multiples Turing machines. J. ACM **13** (1966), 533—546.
HERMAN, G.T.

[1] Every finite sequential machine is linearly realizable. In „Theory of machines and computations" (Z. Kohavi and A. Paz, eds), Academic Press, New York, London, 1971, 209—227.
HIBBARD, T.N.

[1] Least upper bound on minimal terminal state experiments for two classes of sequential machines. J. ACM **8** (1961), 601—612.
HIBBARD, T.N.; ULLIAN, J.

[1] The independence of inherent ambiguity from complementedness among context-free languages. J. ACM **13** (1966), 588—593.
HIRIŞ, V.

[1] Operatori realizați de automate finite. Stud. Cerc. Mat. **20** (1968), 497—502.
HOHN, F.

[1] Algebraic foundations for automata theory. In „Applied automata theory" (J.T. Tou ed.) Academic Press, New York-London 1968, 1—34.
HOLLAND, J.

[1] Survey of automata theory. Memorandum of project Michigan, University of Michigan, Ann Arbor, Michigan 1959.
HOPCROFT, J.

[1] An $n \log n$ algorithm for minimiting states in a finite automaton. In „Theory of machines and computations" (Z. Kohavi and A. Paz, eds.) Academic Press, New York, London, 1971, 189—196.
HOPCROFT, J. E.; ULLMAN, J. D.

[1] Nonerasing stack automata. J CSS, **1** (1967) 166—186.

[2] An approach to a unified theory of automata. Bell System Technical J. **46** (1967), 1763—1829.
[3] Decidable and undecidable question about automata. J. ACM, **15** (1968), 317—324.
[4] Relations between time and tape complexities. J. ACM **15** (1968), 414—427.
[5] Deterministic stack automata and the quotient operator. J. CSS, **2** (1968), 1—12.
[6] Two results on one-way stack automata. IEEE Conference Record of Eighth Annual Symp. on Switching and Automata Theory, Austin, Texas, 1968.
[7] The theory of languages and their relation to automata. Addison-Wesley, Reading, Mas. 1969.

HUFFMAN, D.A.

[1] The synthesis of sequential switching circuits. J. Franklin Ins., **257** (1954), 161—190; 275—303.
[2] Canonical forms for information-lossless finite-state logical machines. IRE Trans. Circuit Theory TC-6 (1959), 41—59.

HUZINO, S.

[1] On some sequential machines and experiments. Mem. Fac. Sci. Kyusyu Univ., Ser. A, **12** (1958), 136—158.
[2] Reduction theorems on sequential machines and experiments. Mem. Fac. Sci. Kyusyu Univ. Ser. A, **12** (1958), 159—172.
[3] On the existence of Sheffer stroke class in the sequential machines. Mem. Fac. Sci Kyushu Univ., Ser. A, **13** (1959), 52—68.
[4] Some properties of convolution machines and σ-composite machines. Mem. Fac. Sci., Kyushu Univ., Ser. A, **13** (1959), 69—83.
[5] Theory of finite automata. Mem. Fac. Sci. Kyusy Univ. Ser. A, **15** (1961/62), 95—159.
[6] Simulatability of finite automata by Shepherdson-Sturgis-machines. Mem Fac. Sci., Kyusyu Univ., Ser A, **20** (1966), 1—15.
[7] On some properties of derivative-mappings, structural diagrams and structural equations: Part. I. Mem. Fac. Sci, Kyushu Univ. Ser. A, **20** (1966), 179—265.
[8] Ibid. Part. II, Mem. Fac. Sci, Kyushu Univ. Ser. A, **21** (1967), 1—103

ЯНОВ Ю. И.

[1] О тождественных преобразованиях регулярных выражений. ДАН СССР **147** (1962), № 2, 327—330.
[2] Об инвариянтных операциях над событиями. Пробл. кибер. **12** (1963) 253—258.
[3] Об эквивалентых преобразованиях регулярных выражений. В: Теория конечных и вероятностных автоматов. Изд. Наука, Москва, 1965, 230—231.
[4] О некоторых подалгебрах событий, не имеющих конечных полных систем тождеств, сб. «Проблемы кибернетики» вып. **17** «Наука», 1966, 255—258.

IBARRA, O.H.

[1] On the equivalence of finite state sequential machine models. IEEE Trans. Electr. Comp. EC-16 (1967), 88—90.

ЯКУБАЙТИС Э. А.

[1] Асихроный логический автомат. Автоматика и вычислительная техника, 1967, № 1.
[2] Операция образования новых переходов в графе конечного автомата. Автоматика и вычислительная техника, 1967, № 2.
[3] Признак избыточности промежуточного сигнала асинхроного логического автомата. Автоматика и вычислительная техника, 1967, № 3.

[4] Одинаковые промежуточные сигналы асинхроного логического автомата. Автоматика и вычислительная техника, 1967, № 4.

INDERMARK, K.

[1] Zur Zustandsminimisierung nichdeterministicher erkennender Automaten. Gesellschaft für Mathematik und Datenverarbeitung, Bonn, 1970.

ION, I.D.

[1] О связи между теорией алгорифмов и абстрактной теорией автоматов. Rev. math. pures et appl. 8 (1963), 673—683.

[2] Un sistem de axiome pentru algebra evenimentelor. Studii şi cercet. mat. Acad. RPR 17 (1965), 599—606.

ION, I.D.; RADU, N.

[1] Algebra. Editura didactică şi pedagogică, Bucureşti, 1970.

IVĂNESCU, P.; RUDEANU, S.

[1] Boolean methods in operational research and related areas. Springer-Verlag, Berlin, 1968.

JEFFREY, R.C.

[1] Some recent simplifications of the theory of finite automata. MIT Res. Lab. Electron. Tech. Rept. 219, May 1959.

JONES, N.D.

[1] A survey of formal languages theory. Univ. of Western Ontario, Computer Science Depart. Tech. Report No. 3, 1966.

[2] Formal languages and rudimentary attributes. Ph. D. Thesis, Univ. West. Ont., London, Ontario 1967.

[3] Classes of automata and tranzitive closure. Information and Control, 13 (1968), 207—229.

JOYCE, F.

[1] A decision procedure for computation of finite automata. J. ACM 9 (1962), 315—323.

KALMAN, R.E; FALB, P.L.; ARBIB, M.A. (eds)

[1] Topics in mathematical system theory. McGraw-Hill Book Co., New York, 1969.

KAMBAYASHI, Y.; YAJIMA S.

[1] The upper bound of k in k-lossless sequential machines. Information and Control, 19, (1971), 423—438.

KAMEDA, T.

[1] Generalized transition matrix of a sequential machine and its applications. Information and Control 12 (1968), 259—275. erratum ibid. 13 (1968), 401.

КАПХЕНГСТ, Х.

[1] Импликации событий и контролные автоматы. ДАН УРСР, 1965, № 5, 567—569 (укр.).

[2] Аксиоматизируемые классы автоматов. Вопр. теорет. кибернетики, Киев, 1965, 6—30.

КАПИТОНОВА, Ю. В.

[1] Об изоморфизме абстрактных автоматов. Кибернетика (Киев), 1965, № 3, 25—28, № 5, 10—13.

KAPLAN, D.M.

[1] Regular expressions and the equivalence of programs. J. Comput. System Sci. 3 (1969) 361—386.

КАРАЦИБА, А. А.

[1] Решение одной задачи из теории конечных автоматов. Успехи Мат. Наук 15 (1960) № 3, 157—159.

KARP, R.M.

[1] Some techniques of state assignment for synchronous sequential machines. IEEE Trans. Electr. Comp. EC-13 (1964), 507—518, Correction: EC-14 (1965), 61.

[2] Some bounds on the storage requirements of sequential machines and Turing machines. J. ACM, 14 (1967), 478—489.

KASAMI, T.

[1] An efficient recognition and syntax-analysis, algorithm for context-free languages. Report of University of Hawaii, Contract No. AF 19 (628)—4379, No. 2, 1965.

[2] A note on computing time for recognition languages generated by linear grammars. Information and Control 10 (1967), 209—14.

KASAMI, T.; TORII, K.; OZAKI, H.

[1] Generalized sequential machine mappings of finite state languages to finite state languages. Techn. Repts. Osaka Univ., 16 (1966), 71—88.

КАЗНАЧЕЕВ, В. И.

[1] Построение тестов конечных автоматов с помощью языка регулярных выражения. Пробл. синтеза цифровых автоматов. Изд. Наука, Москва, 1967, 145—150.

КИДРЯВЦЕВ, В. Б.

[1] Теорема полноты для одного класса автоматов без обратных связей. ДАН СССР 132 (1960), №. 2.

KLEENE, S.C.

[1] General recursive functions of natural numbers. Mathematische Annales, 112 (1936), 727—742

[2] Introduction to metamathematics, D. Van Nostrand, Princeton, New Jersey, 1952.

[3] Representation of events in nerve nets and finite automata. Automata Studies, Ann. Math. Studies 34, Princeton 1956, 3—41.

КЛОСС Б. М.; МАЛЫШЕВ, В. А.

[1] Определение регулярности автомата по его каноническим уравнения. ДАН СССР 172 (1967), № 3, 543—546.

КОВАЛЕНКО, И. Н.

[1] Замечание оссложности представления событий в вероятносных и детерминированных конечных автоматах. Кибернетика (Киев) 1965, № 2.

КОЧКАРЕВ, Б. С.

[1] Об устоичивости вероятностных автоматов. Кибернетика (Киев) 1968, № 2, 24—30.

КОРШУНОВ, А. Д.

[1] Об асимптотических оценках числа праиведенных конечных автоматов. Дискр. Анализ 6 (1966), 35—50.

[2] Об асимптотических оценках числа конечных автоматов. Кибернетика (Киев), 1967, № 2, 12—19.

КОСМИДИАДИ, В. А.

[1] О множествах, разрешимых и перечислимых автоматами. Проблемы логики, АН СССР, 1963, 102—115.

КОЗМИДИАДИ, В. А.; ЧЕРНЯВСКИЙ, В. С..

[1] Об упорядочений множества автоматов. Вопр. теор. мат. машин 2 (1962), 34—51.

KNUTH, D.E.

[1] On the translation of languages from left to right. Information and Control, 8 (1965), 607—639.

[2] A characterization of parenthesis languages. Information and Control, 11 (1967), 269—289.
KNUTH, D.E.; BIGELOW, R.

[1] Programming languages for automata J.ACM, 14 (1967), 615—635.
KOBAYASHI, K.

[1] Some unsolvable problems on context free languages and their application to on-line language recognizers. Information and control, 13 (1968), 245—253.
KOBAYASHI, K.; SEKIGUCHI, S.

[1] On the class of predicates definable by two-way multiple finite automata. J. ACM, 13 (1966), 236—261.
KOHAVI, Z.

[1] Secondary state assignment for sequential machines. IEEE Trans. Electr. Comp. EC-13 (1964) (193—203.

[2] Reduction if the number of states in incompletely specified sequential machines. Electron Letters 1 (1965), 209—210.

[3] Switching and finite automata theory. McGraw-Hill Book, Co. 1970.
KOHAVI, Z.; PAZ, A. (eds).

[1] Theory of machines and computations. Proceedings of an International Symposium on the theory of machines and computation, held at Tehnion in Haifa, Israel (Aug. 1971), Academic Press, New York, London, 1971.
KOHAVI, Z.; SMITH, E.J.

[1] Decomposition of sequential machines. Switching Circuit Theory and Logic. Design (IEEE Conf. Rec.) New York 1965, 52—61.
KOHAVI, Z.; WINOGRAD, J.

[1] Bounds on the lenght of synchronizing sequences and the order of information losslessness. In „Theory of machines and computation" (Z. Kohavi and A. Paz, eds). Academic Press, New York, London, 1971, 197—206.
KORENJAK, A. J.; HOPCROFT, J.E.

[1] Simple deterministic languages. IEEE Conference Record of seventh Annual Symposium on Switching Automata Theory, Berkeley, California, 1966, 36—46.
КРАТКО М. И.

[1] Алгоритмическая неразрешимость задачи из теории конечных автоматах. Дискр. Анализ 2 (1964), 37—41.

[2] Алгоритмическая неразрешимость проблемы распознавания полноты для конечных автоматах. ДАН СССР **155** (1964) № 1, 35—37.

[3] Формальные вычисления Поста и конечные автоматы. Пробл. кибернетики **17** (1966), 41—65.
КРЫЛОВ, В. .

[1] Представление закодированных регулярных событии в абстрактных конечных автоматах. Укр. Матем. Журн. **16** (1964), № 3. 385—389.
KREIDER, D.L.; RITCHIE, R.W.

[1] A basis theorem for a class of two-way automata. Zeitschrift f. Math. Logik und Grundl. d. Math. 12 (1966), 243—255.
КРИНСКИЙ, В. И.

[1] Асимптотические оптимальный автомат с экспоненциальной скоростью сходимости. Биофизика **6** (1963), №. 6.

[2] Об одной конструкции последовательности автоматов и ее поведения в играх. ДАН ССС 156(1964), №. 6, 1312—1315.
KROHN, K.B., RHODES, J.L.

[1] Algebraic theory of machines. Proc. Sympos. Math. Theory of Automata (J. Fox, ed.) (New York, 1962). Polytechnic Press of Polytechnic Inst. of Brooklyn, Brooklyn, N.Y. 1963, 341—384.

[2] Algebraic theory of machines I. The main decomposition theorem Techn. Rept. Dept. Math. Univ. Calif, Berkeley 1963.

[3] Results on finite semigroups derived from the algebraic theory of machines. Proc. Nat. Acad. Sci. USA 53 (1965), 499—501.

[4] Algebraic theory of machines. I. Prime decomposition theorem for finite semigroups and machines. Trans. Amer. Math. Soc. 116 (1965), 450—464.

[5] Complexity of finite semigroups and finite-state machines. In „Algebraic theory of machines languages and semigroups" (M.A. Arbib, ed.) Academic Press, New York-London, 1968.
KROHN, K.B.; MATEOSIAN, R.; RHODES, J.L.

[1] Complexity of ideals in finite semigroup and finite state machines. Math. Systems Theory 1 (1967), 59—66, Erratum, ibid. 373.

[2] Methods of the algebraic theory of machines I. Decomposition theorem for generalized machines, properties preserved under series and parallel composition of machines. J. Computer and System Sci. 1 (1967), 55—85, Erratum, 373.
KROHN, K.: RHODES, J.L; TILSON, B.R.

[1] The prime decomposition theorem of the algebraic theory of machines. In „The Algebraic Theory of machines, Languages, and semigroups" (M.A. Arbib, ed.) Academic Press Inc; New York (1968) 81—125.

[2] Local structure theorems" for finite semigroups. In „The algebraic theory of machines, languages and semigroups". (M. A. Arbib, ed.) Academic Press Inc., New York (1968), 147—189.

[3] Axioms for complexity of finite semigroups. In „The algebraic theory of machines, languages and semigroups" (M.A. Arbib, ed.) Academic Press, Inc., New York (1968), 233—266
КУРМИТ, А. А.

[1] Решение некоторых задач из теории абстрактных автоматов с помощью теории графов. Автоматика и вычислительная техника, 1967, № 1.

[2] Обобщение обратные автоматы. Автоматика и вычислительная техника, 1967, № 3.

[3] Обращения автомата по отношению к регулярному событию. Автоматика и вычислительная техника, 1967, № 4.
KURODA, S. Y.

[1] Classes of languages and linear bounded automata. Information and Control 7 (1964), 207—223.
КУЗНЕЦОВ, О. П.

[1] Об асинхронных логических сетях. Пробл. передачи информации 9 (1961), 103—115.

[2] Представление регулярных событии в асинхронных автоматах. Автоматика и Телемеханика, 26 (1965), № 6, 1086—1093.
LAING, R.; WRIGHT, J. B.

[1] Commutative machines. Univ. of Michigan, Techn. Note 04422, 0310—24—T, December, 1962.

LAMBEK, J.

[1] The mathematics of sentence structure. Amer. Math. Monthly 6 (1958), 154—170

LANDWEBER, P.S.

[1] Three theorems on phrase structure grammars of type 1. Information and Control 6 (1963) 131—137.

[2] Decision problems of phrase structure grammars. PGEC, 13 (1964), 354—362.

ЛАРИН, Л. К.; ОСИНСКИЙ, Л. М.

[1] Экономичное кодирование состояний конечного автомата. Кибернетика (Киев) 1966, № 3.

LAVALLEE, P.

[1] Nonstable cycle and level sets for linear sequential machines. IEEE Trans. Electr. Comp. EC-14 (1965), 957—959.

[2] Some new group teoretic properties of singular linear sequential machines. IEEE Trans. Electr. Comp. EC-14 (1965), 959.

ЛАЗАРЕВ, В. Г.; ПИЙЛЬ, Е. И.

[1] Метод синтеза конечных автоматов. Автоматика и Телемеханика 22 (1961), №. 9, 1194—1201.

[2] Уменьшение числа состояний одного класса конечных автоматов. ДАН СССР **143** (1962), 1064—1066.

[3] Синтез асинхронных конечных автоматов. Изд. Наука, Москва 1964.

[4] Минимизация числа внутренных состояний некоторых классов конечных автоматов. В: Теория конечных и вероятностных автоматов. Изд. Наука, Москва, 1965, 154—157.

ЛАЗАРЕВ, В. Г.; ПИЙЛЬ, Е. И.; ТУРУТА, Е. И.

[1] О надежности дискретных автоматов. Кибернетика (Киев) 1968) №. 1.

LEE, C.Y.

[1] Automata and finite automata. Bell System Techn. J. 39 (1960), No. 5, 1267—1295.

[2] Categorizing automata by *w*-machine programs. J. ACM 8 (1961), 384—399.

ЛЕТИЧЕВСКИЙ, А. А.

[1] Условия полноты для конечных автоматов. Вычисл. матем. и матем. физика, 1961, № 4.

[2] О синтезе конечных автоматов. ДАН СССР 2 (1961), 139—141.

[3] Алфабитные отображения и конечные автоматы В: Теория конечных и вероятностных автоматов. Изд. Наука, Москва, 1965, 250—252.

[4] Эквивалентность автоматов с заключительным состоянием. Кибернетика (Киев) 1966, № 4, 1967, № 1.

ЛЕВЕНШТЕЙН, В. И.

[1] Самонастраивающиеся автоматы для декодирования сообщении. ДАН СССР **141** (1961), №. 6, 1320—1323.

[2] Об обращении конечных автоматах. ДАН СССР **147** (1962), № 6, 1300—1303.

[3] Декодирующие автоматы, инвариантные относительно начального состояния. Пробл. Кибернетики, 12 (1964), 125—136.

[4] О самонастраивающихся автоматах. В: Теория конечных и вероятностных автоматов. Изд. Наука, Москва 1964, 150—153.

LÉVY—BRUHL, I.

[1] Introduction aux structures algébriques. Dunod, Paris, 1968.

LEWIS, P.M. II; STEARNS, R.E.

[1] Syntax directed transduction. IEEE Conference Record of Seventh Annual Symposium on Switching and Automata Theory, Berkeley, California, 1966, 21—35.

LEWIS, P.M. II; STEARNS, R.E.; HARTMANIS, J.

[1] Memory bounds for recognition of context-free and context sensitive languages. IEEE Conf. Record. Switching Circ. Theory and Log. Des. (1965), 191—202.

LINDNER, R.

[1] Sequentielle Operatoren und ihre Anwendung beim Studium sequentielles (diskreter) Codierungen. Elektron. Informationsverarb. u. Kybernetik 4 (1968), 107—136, 151—172.

LIU, C.L.

[1] A property of partially specified automata. Information and control 6 (1963), 169—176.

[2] Determination of the final state of an automaton whose initial state is unknown. IEEE Trans. Electr. Comp. EC-12 (1963), 918—921.

[3] Some memory aspects of finite automata. M.I.T. Research Laboratory of Electronics, Report 411, (1963).

[4] k-th order finite automaton. IEEE Trans. Electr. Comp, EC-12 (1963), 470—475; EC-13 (1964), 642.

[5] Lattice functions, pair algebras and finite-state machines. J. ACM 16 (1969), 442—454

ЛУНЦ, А. Г.

[1] Алгебраические методы анализа и синтеза контактных схем, Изв. АН СССР, сер. Матем. **10** (1952), № 5.

[2] p-адический метод в теории конечных автоматов. В: Теория конечных и вероятносных автоматов. Изд. Наука, Москва 1965, 224—229.

[3] p-адический аппарат теории конечных автоматов. Пробл. кибернетики **14** (1965), 17—30.

[4] Метод анализа конечных автоматов. ДАН СССР **160** (1965), № 4, 778—780.

ДУПАНОВ, О. Б.

[1] О принципе локального кодирования и реализации функций из некоторых классов схемами из функциональных элементов. ДАН СССР **140** (1961), № 2.

ЛЮБИЧ, Ю. И.

[1] Оценки числа состояний возникающих при детерминизации недееррминированного автомного автомата. ДАН СССР **155** (1964) 41—43.

[2] О свойствах периодичности событии, представимых в конечных автоматах. Укр. Матем. Ж., 1964, № 3, 396—402.

[3] Оценки для оптимальной детерминизации недетерминированных автоматов. Сибирский Матем. Ж. **5** (1964), 337—355.

ЛЮБИЧ, Ю. И.; ЛИВШИЦ, Э. М.

[1] Оценки веса регулярного события над однобуквенным алфабитом. Сибирский Матем. Ж. **6** (1965), 122—126.

MAGIDOR, M.

[1] Decomposition theorems for finite sequential machines. Israel J. Math. **6** (1968), 246—260.

MARCUS, S.

[1] Automates finis, progressions arithmétiques et grammaires à un nombre fini d'états. C.R. Acad. Sci. Paris, **256**, 17 (1963), 3571—3574.

[2] Gramatici şi automate finite. Ed. Academiei R.S.R Bucureşti 1964.

[3] Sur les grammaires à un nombre fini d'états. Cahiers de Linguistique théor. et appl. **2** (1964).

[4] Langues complétement adéquates et langues régulières. Zeitschrift für Math. Logik und Grund. der Math. **10** (1964)

MASSEY, J.L.

[1] Note on finite memory sequential machines. IEEE Trans. Electr. Comp. EC-15 (1966), 658—659.

[2] Applications of automata theory in coding. In „Applied automata theory" (J.T. Tou, ed). Academic Press, New York, London, 1968, 125—146.

МАРТЫНЮК, В. В.

[1] Соотношение между памятью и некоторыми возможностями конечного автомата., Сб. «Проблемы кибернетики», вып. 5, Физматгиз (1961), 87—96.

McCARTHY, J.; SHANNON, C.E. (eds).

[1] Automata Studies. Princeton University Press, Princeton, N.J. 1956.

McCLUSKEY, E.J.

[1] Reduction of feedback loops in sequential circuits and carry leads in iterative networks. Information and Control **6** (1963), 99—118.

[2] Introduction to the theory of switching circuits. McGraw-Hill Book Co., New York 1965.

McCULLOCH, W. S.; PITTS, W.

[1] A logical calculus of the ideas immanent in nervous activity. Bull. Math. Biophysics, **5** (1943), 115—133.

McKRIGHT, J.

[1] Kleene quotient theorems. Pac. J. Math. **14** (1964), 1343—1352.

McNAUGHTON, R.

[1] Symbolic logic and automata. Wright Air Dev. Div., Techn. Note 60, Cincinnati (Ohio) 1960.

[2] The theory of automata, a survey. Advances in Comp. **2**, Acad. Press, New York 1961, 379—421.

[3] Star height and order M.I.T. Skeletal Lecture Notes, 1964.

[4] Sequential circuits. Part B. Behavioral Properties. IEEE Trans. Circuit Theory CT-**11** (1964), 27—39.

[5] The loop complexity of regular events. (Presented to the 1965 Symposium on Logic, Computativity and Automata, Roma, New York 1965).

[6] Techniques for manipulating regular expressions. (Presented to the conference on Systems and Computer Science at the University of Western Ontario, London, Canada, September 1965).

[7] Testing and generating infinite sequences by a finite automaton. Information and Control-**9** (1966), 521—530.

[8] The loop complexity of regular events. Logic, Computability and Automata. Proc. Joint RADC—HAC Symp. 1967, Rome, N.Y. (F. Cannonito, ed.) Thomson Book Co., Washington, D.C., 1967.

[9] Paranthezis grammars. J. ACM **14** (1967), 179—201; 490—500.

[10] An introduction to regular expressions. In „Applied automata theory" (J.T. Tou ed.) Academic Press, New York-London, 1968, 35—54.

McNAUGHTON, R.; YAMADA, H.

[1] Regular expressions and state graphs for automata. IRE Trans. Electr. Comp. EC-9 (1960), 39—47.

[2] Regular expressions and state diagrams. Depart. of Electr. Engineering, Digital Systems Lab., Tech. Rept. 15, March 1962.

[3] Regular expressions and state graphs for automata. In „Sequential Machines-Selected Papers" (E.F. Moore, ed.) Addison-Wesley, Reading, Massachusetts 1964. 157—174.

MEALY, G.H.

[1] A method for synthetizing sequential circuits. Bell System Techn. J. 34 (1955), 1045—1079.

МЕДВЕДЕВ, Ю. Т.

[1] О классе событий, допускающих представление в конечном автомате, «Автоматы», ИЛ, Москва, 1956, 385—401.

[2] On a class of events representable in a finite automaton. Report No. 34—73. Lincoln Lab., Lexington, Mass, 1958.

МЕДВЕДЕВ, О. В.

1[] Минимизация, числа состояний последовательностой машины при сходных последовательностях, не содержащих двух одинаковых символов подяд Автоматика и Телемеханика 1966, № 5.

МЕЛИХОВ, А. Н.; ДВОРЯНЦЕВ, Н. А.

[1] Теоретико-множественные и алгеобранческие операции над конечными автоматами. Изв. АН СССР, Техн. киб., 1967, № 3, 118—125.

МЕЛИХОВ, А. Н.; БЕРНШТЕЙН, Л. С.

[1] Последовательная декомпозиция абстрактных автоматов. Изв. IH СССР, Техн. киб. 1968, № 3, 44—53.

MEYER, A.R.

[1] A note on star-free events. J. ACM 16 (1969), 220—225.

MEYER, F. J.; ZEIGLER, B.P.

[1] On the limits of linearity. In „Theory of machines and computations" (Z. Kohavi and A. Paz, eds.) Academic Press, New York, London, 1971, 229—242.

MEZEI, J.E.

[1] Minimal characterizing experiments for finite memory automata. IRE Trans. Electr. Comp EC-10 (1961), 288.

[2] Structures of monoids with applications to automata. Mathematical Theory of Automata, Polytechnic Press, Brooklyn (N. J) 1963, 267—300.

MEZEI, J.; WRIGHT, J.B.

[1] Algebraic automata and context-free sets. Information and Control 11 (1967), 3—29.

MILLER, R.E.

[1] Switching theory. Vol. II. Sequential circuits. J. Willey & Sons, New York, 1965.

MILLER, R.E.; WINOGRAD, S.

[1] On the number of transitions entering the states of a finite automaton. IEEE Trans. Electr. Comp. EC-13 (1964), 463—464.

MINSKY, M.I.

[1] Some universal elements for finite automata. In „Automata Studies" (C.E. Shannon and J. McCartley eds.), Princeton Univ. Press (1956), 117—128.

[2] Recursive unsolvability of Post's problems of „Tag" and other topics in the theory of Turing machines. Annals of Math., 74 (1961), 437—455.

[3] Computation; Finite and infinite machines. Prentice Hall Inc. Englewood Cliffs N.J. 1967.

МИРКИН Б. Г.

[1] О двойственных автоматах. Кибернетика (Киев), 1966, № 1, 7—10.

[2] К теории многолистночных автоматах. Кибернетика (Киев) 1966, № 5, 12—18.

[3] О распознавании относительной эквивалентности состояний последовательностной машины. Автоматика и Телемеханика, 1967, № 2, 133—136.

[4] Минимизация последовательностных машин относительно регулярных полных справа событий. Автоматика и Телемеханика 1967, № 11, 149—153.

MOISIL, Gr.C.

[1] Teoria algebrică a mecanismelor automate. Editura tehnică, Bucureşti, 1959.

[2] Schema cu comandă directă cu contacte şi relee. Ed. Acad. R.S.R. Bucureşti, 1959.

[3] Funcţionarea în mai mulţi timpi a schemelor cu relee ideale. Ed. Acad. R.S.R., Bucureşti, 1960.

[4] Algebraická teorie automatů. Ceskoslovenska Akademie Ved, Praha 1964.

MOORE, E.F.

[1] Gedanken — Experiments on sequential machines. In „Automata studies" (C.E. Shannon and J. McCarthy eds.) Princeton University Press, Princeton, N.J. 1956, 129—153.

[2] Machine models of self-reproduction. Math. Prob. Biol. Sci., Proc. Symp. Appl. Math. 14 (1962) 17—33.

[3] Sequential Machines. Selected papers. Addison Wesley Publ. Co., Inc., Reading, Mass. 1964.

[4] Bibliografic comments on sequential machines. Sequential Machines, Addison-Wesley Publ. Comp., Reading (Mass). 1964, 236—244.

MOSTOWSKI, A.

[1] Sentences undecidable in formalized arithmetic. North Holland Publ. Co., Amsterdam, 1957.

МОЩЕНСКИЙ, В. А.

[1] Об одной задачи теорий синтеза конечных автоматов. Изв. АН СССР, Техн. киб., 1966, № I, 70—78.

MULLER, D.E.

[1] Infinite sequences and finite machines. Switching Circuit Theory and Logic Design (IEEE Conf. Rec.) New York, 1963, 3—16.

MURRAY, F.J.

[1] Mechanisms and robots. J. ACM 2 (19655), 61—82.

MYHILL, J.

[1] Finite automata and representation of events. Wright Air Dev. Center Report, Dayton (Ohio) 1957, 112—123.

[2] Linear bounded automata. Wright Air Der. Div. Techn. Note 60—165, Cincinnati (Ohio) 1960.

[3] Finite automata semigroups and simulation. In lecture notes for a summer conference on Automata Theory, University of Michigan, 1963.

[4] Notes for a series of lectures on recursive functions. In lecture notes for a summer conference on Automata Theory, University of Michigan, 1963.

[5] The abstract theory of self-reproduction. In Views on General Systems Theory. (M. D. Mesarovic ed.) John Wiley & Sons, Inc., New York, 1964.

МУРСКИЙ, В. Л.

[1] О преобразованиях конечных автоматов. Пробл. кибернетики **15** (1965), 101—116.

МУЧНИК, А. А.

[1] О длине эксперимента, определяющего структуру конечного сильно связного автомата. Пробл. киборн. вып. 20, «Наука» (1968), 159—171.

NASLIN, P.

[1] Finite automata. Progr. Control Engng. 2, Academic Press, New York, 1964, 117—159.

НЕЙМАРК, Ю. И.; ГРИГОРЕНКО, В. П.; РАПОПОРТ, А. Н.

[1] Об оптимизации незавнсимыми детерминированными и стохастическими автоматами. сб. Прикл. матем. и кибор. Материалы к Всес. Межвуз симпозиуму по прикл. матем. и киб. Горький 1967, 148—166.

NELSON, R.J.

[1] Basic concepts of automata theory. Proc. of the ACM 20th Nat. Conf., Spartan Books, Washington (D.C) 1965, 138—161.

[2] Introduction to automata. John Wiley & Sons, Inc. New York 1968.

НЕПОМНЯЩИЙ, В. А.

[1] Об алгоритмах, осуществляемый повторяющимися применениями кочнечных автоматов. Дискр. Анализ. **5** (1965), 77—82.

[2] О некоторых автоматах, способных базис для рекурсивно-перечислимых множеств. 1966, № 5, 69—83.

NERODE, A.

[1] Linear automaton transformations. Proc. Amer. Math. Soc. **9** (1958), 541—544.

NETHERWOOD, D.S.

[1] Minimal sequential machines. IRE Trans. Electr. Comp. EC-**8** (1959), 339—345.

NEUBER, S.; STARKE, P.H.

[1] Über Homomorphie und Reduktion bei nicht-deterministischen Automaten. Elektron. Informationsverarb. u. Kybernetik 3 (1967), 349—359.

NEUMAN, J. von

[1] The general and logical theory of automata. In Cerebral Mechanisms in Behavior: The Hixon Symposium. John Wiley & Sons, Inc., New York 1951.

[2] Theory of self-reproducing automata (ed. and compl. by A.W. Burks) University of Illinois Press, Urbana 1966.

NEUMANN, B.H.

[1] Embedding theorems for semigroups. J. London Math. Soc., 35, (1960), 184—192.

NEUMANN, P.G.

[1] Error limiting codes using information-lossless sequential machines. IEEE Trans. Information Theory IT-**10** (1964), 108—115.

NEWBORN, M.M.

[1] Maximal memory binary imput- binary output finite-memory sequential machines. IEEE Trans. on Computers C-17 (1968), 67—71.

[2] A synthesis technique for binary input- binary output synchronous sequential Moore machines. IEEE Trans. on Computers C-17 (1968), 697—699.

NEWELL, A.; SHAW, J.C.
[1] Programming the logic theory machine. Proc. Western Joint Comput. Conf. 1957, 230
NICHOLS, A.J.
[1] Modular synthesis of sequential machines. Switching Circuit Theory and Logic Design (IEEE Conf. Rec.) New York 1965, 62—70.
NICHOLS, A.J.; BERNSTEIN, A.J.
[1] Stato assignements in combinatorial circuits. IEEE Trans. Electr. Comp. EC-14 (1965), 343.
NIEVERGELT, J.
[1] Partially ordered classes of finite automata. Switching circuit Theory and Logic. Design (IEEE Conf. Rec.) New York 1965, 229—234.
NOWAK, J.
[1] Certain construction of finite automata. Bull Acad. Polon. Sci. Sér. Sci. Math. Astronom. Phys. 16 (1968), 815—818.
OEHMKE, R.H.
[1] On the structure of an automaton and its input semigroup. J. ACM 10 (1963), 521-525.
OETTINGER, A.G.
[1] Automatic syntactic analysis and the pushdown store. Proc. Symp. Applied Math., 12 Amer. Math. Soc. Providence, Rhode Island 1961.
ОФМАН, Ю. П.
[1] Универсальный автомат. Тр. Московского Мат. Общ. 14 (1965), 189—199.
OTT, G.; FEINSTEIN, N. F.
[1] Design of sequential machines from their regular expressions. J. ACM 8 (1961), 585—600.
OVERHEU, D.L.
[1] An abstract machine for symbolic computation. J. ACM 13 (1966), 444—468.
PAPERT, S.; McNAUGHTON, R.
[1] On topological events. Theory of Automata. University of Michigan. Engineering Summer Conferences, 1966.
PARIKH, R.J.
[1] Language generating devices. MIT Res. Lab. Electron. Quart. Progr. Rept. 60 (1961), 199—212 (Reprinted as: On context free-languages J. ACM, 13 (1966), 570—581).
PAULL, M.; UNGER, S.H.
[1] Structural equivalence of context-free grammars. IEEE Conference Record of Eighth Annual Symp. on Switching and Automata Theory. Austin, Texas, 1967, 7—13.
PAZ, A.
[1] Homomorphisms between finite automata. Bull. Res. Council Israel, F 10 (1962), No. 3, 93—100.
PAZ, A.; PELEG, B.
[1] On concatenative decompositions of regular events. U.S. office of Noval Res. Inf. Systems Branch Tech. Rept. No. 20, 1965.
[2] Ultimate-definite and symmetric-definite events and automata. J. ACM 12 (1965), 399—410.
PEDELTY, M.J.
[1] Temporally organized automata and an algebraic theory of machines. Comp. and Inform. Sci., Spartan Books, Washington (D.C.) 1964, 246—261.

PERLES, M.; RABIN, M.O.; SHAMIR, E.
[1] The theory of definite automata. IEEE Trans. Electr. Comp. EC-12 (1963), 233—243.
PERROT, J.E.
[1] Groups and automata. In „Theory of machines and Computations" (Z. Kohavi and A. Paz, eds.) Academic Press, New York, London, 1971, 287—293.
PETERSON, W.E.
[1] Error correcting codes. John Wiley & Sons, Inc., New York, 1961.
ПЕТРОСЯН, А. В.; ШУКУРЯН, Ю. Г.
[1] О разбиениях автоматов. Тр. вычисл. центра АН Арм. СССР 2 (1964) 51—60.
PFEIFFER, P.E.
[1] Sets, events and switching. McGraw-Hill Book Co., New York, 1964.
ПИЙЛЬ, Е. И.
[1] О кодировании внутренных состоянии конечного автомата. Изв. АН СССР, Тезн. киб., 1965, № 2, 58—65.
[2] Некоторые вопросы кодирования конечных автоматов. Пробл. синтеза цифровых автоматов. Изд. Наука, Москва, 1967, 14—27.
ПЛЕСНЕВИЧ, Г. С.
[1] О событиях, связанных с семейством автоматов. Вычисл. системы 9 (1963), 44—64 (Новосибирск).
[2] Оценки среднего времени вычисления на одномерных односторонних итеративных системах. АН СССР 171 (1966), 537—540.
POAGE, J.F.; McCLUSKEY, E.J.
[1] Derivation of optimum test sequences for sequential machines. Switching Circuit Theory and Logic. Design (IEEE Conf. Rec.) New York 1964, 121—132.
POHL, H.J.
[1] Über die Reduzierung der Anzahl des Eingabesignale von Automaten. Z. Math. Logic Grundl. Math. 14 (1968), 93—96.
[2] Darstellbarkeit von Ereignissen in Z-endlichen Automaten. Z. Math. Logic Grundl. Math. 15 (1969), 93—95.
ПОЛЯК, Б. Т.
[1] Задачи многоходового выбора. Вопр. теории матем. машин, Москва, 2 (1962), 156—173.
ПОНОМАРЕВ, В. А.
[1] Об одной конструкций конечного автомата, асимптотически-оптимального в стационарной случайной среде. Биофизика 6 (1963), № 6.
POPESCU, N.; RADU, A.
[1] Teoria categoriilor şi a fasciculelor. Edit. Ştiinţifică, Bucureşti, 1971.
POST, E.
[1] Finite combinatory processes-formulation I. J. of Symbolic Logic, 1 (1936), 103—105.
[2] Formal reductions of the general combinatorial decision problem. Amer. J. Math., 65 (1943), 114—125.
[3] A variant of a recursively unsolvable problem. Bull. Amer. Math. Soc., 52 (1946), 264—268.
ПОТТОСИН, Ю. В.
[1] Сравнительная оценка двух алгоритмов минимизации числа состоянии дискретного автомата. Автоматика и вычислительная техника, 1967, № 4.

PUGSLEY, J.H.

[1] Sequential functions and linear sequential machines. IEEE Trans. Electr. Comp. EC-14 (1965), 376—382.

RABIN, M.O.

[1] Two-way finite automata. Proc. Summer Institute of Symbolic Logic, Cornell (1957), 366—369.

[2] Speed of computation of functions and classification of recursive sets. Bull. Res. Council Israel, F 8 (1959), 69—70.

[3] Degree of difficulty of computing a function and a partial ordering of recursive sets. Hebrew University, Jerusalem, Israel, 1960.

[4] Real time computation. Israel Journal of Math. 1 (1964), 203—211.

[5] Mathematical theory of automata. Proc. Amer. Math. Soc. 1967.

RABIN, M.O.; SCOTT, D.

[1] Remarks of finite automata. Summaries Summer Inst. Symb. Logic (Cornell Univ. 1957) 1960, 106—112.

[2] Finite automata and their decision problems. IBM J. Res. Dev. 3 (1959), 114—125. Reprinted in „Sequential machines selected papers". (E.F. Moore, ed.) Addison-Wesley, Reading Massachusetts 1964, 63—91.

РАБИНОВИЧ, З. Л.; КАПИТОНОВА Ю. Б.

[1] Общих принципы синтеза комбинационных схем. Журнал вычислительной математики и математической физики, 1963, 3, № 4.

РАБИНОВИЧ, З. Л.; КАПИТОНОВА, Ю. Б.; КОМУХАЕВ, Э. И.

[1] Методика кодирования состояний конечных автоматов с точки зрения минимизации аппаратурных затрат. Сб. «Теория дискретных автоматов», «Зинатне», Рига, 1967.

RADKE, C.E.

[1] Enumeration of strongly connected sequential machines. Information and Control 8 (1965), 377—389

RADO, T.

[1] On non-computable functions. Bell System Tech. J. 41. (1962), 877—884.

RAMAMOORTHY, C.V.

[1] Connectivity considerations of graphs representing discrete sequential systems. IEEE Trans. Electr. Comp. EC-14 (1965), 724.

RANEY, G.N.

[1] Sequential functions. J. ACM 5 (1958), 177—180.

РЕДЬКО, В. Н.

[1] О коммутативных замыканиях событии. ДАН УРСР, 1963, № 9, 1156—1159.

[2] Об определяющей совокупности соотношении алгебры регулярных событий. Укр. Матем. Ж. 16 (1964), 120—126.

[3] Об алгебре коммутативных событий. Укр. Матем. Ж. 16 (1964), № 2, 185—195.

[4] О связи автоматов и полугрупп, Вопр. теорет. кибернетики, Киев, 1965, 83—90.

[5] О коммутативных автоматах. В: Теория конечных и вероятных автоматов. Изд. Наука, Москва 1965, 253—256.

[6] Об одном классе композиций автоматов. В сб.: Теория автоматов, Семинар; вып. 1 (1966), 5—11 (Изд. Наук, думка, Киев).

REISCHER, C.; SIMOVICI, D.A.

[1] Associative algebraic structures in the set of boolean functions and some applications in the automata theory. IEEE Trans. Computers, C-20 (1971), 298—303.

[2] On the existence of a periodic analogue for a finite connected automata. IEEE Trans. Computers vol. C-21, (1972), 208—211.

[3] On the existence of a periodic analogue of a finite automaton (abstract) In „Theory of machines and computations" (Z. Kohavi and A. Paz, eds) Academic Press, New York, London, 1971, 207.

[4] Linear boolean automata. Wiss. Z. Tech. Hochsch. Ilmenau 17, Heft 3 (1971) 83—96.

[5] Further results on linear boolean automata. An. şt. univ. „Al. I. Cuza" Iaşi Sect. I Mat. (N.S.) (1974) (sub tipar)

[6] On a formalization of abstract modular networks. Bul. Inst. Politehn., Iaşi, 19 (23). (1973), (sub tipar),

REUSCH, B.

[1] Linear and partial-linear realization of automata. Information Processing 68 (Proc. IFIP Congress, Edinburgh, 1968), vol. 1: Mathematics, Software, North-Holland, Amsterdam, 1969, 308—311.

[2] Linear Automaten. Bibliographisches Institut, Mannheim-Vienna-Zürich, 1969.

[3] Zur Realisierung von Automaten über Algebren. Gesellschaft für Mathematik und Datenverarbeitung, Bonn, 1971.

[4] Theorems on additive automata. In „Theory of machines and computations" (Z. Kohavi and A. Paz, eds.) Academic Press, New York, London, 1971, 243—253.

REYNOLDS; B.G.

[1] Some results on cascade decomposition of automata. Information and Control 14 (1969), 478—489.

RHODES, J.

[1] Some results on finite semigroups. J. Algebra, 4 (1966), 471—504.

RINE, D.C.

[1] A categorial characterization of general automata. Information and Control, 19 (1971), 30—40.

RITCHIE, R.W.

[1] Classes of predictable computable functions. Trans. Amer. Math. Soc. 106 (1963), 139—173.

[2] Finita automata and sets of squares. J. ACM 10 (1963), 528—531.

ROGERS, H.JR.

[1] Theory of recursive functions and effective computability. McGraw-Hill Book Co., New York, 1967.

ROSE, G.F.

[1] Output completeness in sequential machines. Proc. Amer. Math. Soc. 13 (1962), 611—614.

ROSEN, R.

[1] Abstract biological systems as sequential machines. Bull. Math. Biophys. 26 (1964), 103—111, 239—246.

ROSENBERG, A.L.

[1] Nonwriting expressions of finite automata. Report. BL-39, Harvard University 1965.

[2] On multi-head finite automata. IBM J. Res. Dev. 10 (1966), 388—394.

ROZENBERG, G.
[1] p-automata and p-events. Bull. Acad. Polon. Sci. Sér. Sci. Math. Astronom. Phys. 17 (1969) 565—570.
ROSENKRANTZ, D.J.
[1] Matrix equations and normal forms for context-free grammars. J.ACM, 14 (1967), 501—507.
RUDEANU, S.
[1] Axiomele laticilor şi ale algebrelor Booleene. Editura Acad. R.S. România, Bucureşti, 1963.
SABIDUSSI, G.
[1] Finite automata over monoids. Mathematical Report no. 2, vol. 1, March 1969, Mc Master, University, Canada.
САГАЛОВИЧ Ю. Л.
[1] Сокращение памяти автомата устойчивого к провождениями и состояниия его внутренных элементов. Сб. «Проблемы передачи информации», 1967, № 3.
SALOMAA, A.
[1] Theorems on the representation of events in Moore-automata. Ann. Univ. Turkuensis, Ser. A, I, 69 (1964), 3—14.
[2] On the reductibility of events represented in automata. Ann. Acad. Sci. Fennicae, Ser. A, I, 353 (1964), 3—16.
[3] Axiom systems for regular expressions of finite automata. Ann. Univ. Turkuensis, Ser. A., I, 75 (1964), 5—29.
[4] Two complete axiom systems for the algebra of regular events. J. ACM 13 (1966) 158—169.
[5] Theory of automata. Pergamon Press, Oxford-New York-Toronto, Ont., 1969.
[6] On some families of formal languages obtained by regulated derivations. Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A, I, No. 479 (1970), 18.
[7] The generative capacity of transformational grammars of Ginsburg and Partee. Information and Control 18 (1971), 227—232.
SALOMAA, A.; TIXIER, V.
[1] Two complete axiom systems for the extended language of regular espressions. IEEE Trans. on Comp. C-17 (1968), 700.
SAMELSON, K.; BAUER, F.L.
[1] Sequential formula translation. CACM, 3 (1960), 76—82.
SANTOS, E.S.
[1] Maximim automata. Information and Control 13, (1968), 363—377.
SCHEINBERG, S.
[1] Note on the Boolean properties of context free languages. Information and Control, 3 (1960), 372—375.
SCHMITT, A.
[1] Theorie der nicht-deterministischen und unvollständigen Mealy Automaten. Dissertation, Techn. Hochschule Hannover, Dez. 1966.
[2] Zur Theorie der nichtdeterministischen und unvollständigen Automaten. Computing (Arch. Electron. Rechnen) 4 (1969), 56—74.
SCHUBERT, H.
[1] Kategorien I, II. Akademie Verlag, Berlin, 1970.

SCHÜTT, D.
[1] Überblick über die algebraischen Theorien in der Automaten-theorie. Gesellschaft für Mathematik und Datenverarbeitung, Bonn, 1968.
SCHÜTZENBERGER, M.P.
[1] Un problème de la théorie des automata. Séminaire Dubreil-Pisot, Paris, Décembre 1959.
[2] A remark on finite transducers. Information and Control, **4** (1961), 185—196.
[3] On the definition of family of automata. Information and Control **4** (1961), 245—270.
[4] On a problème of R. Jungen. Proc. Amer. Math. Soc., **13** (1962), 885—890.
[5] Finite counting automata. Information and Control **5** (1962), 91—107.
[6] Certain families of elementary automata. Proc. Symp. Math. Theory Automata, XII, MR 1 Symposia Series, (1962), 139—153.
[7] On context-free languages and pushdown automata. Information and Control, **6** (1963), 246—264.
[8] On the algebraic theory of automata. Proc. IFIP Congr. New York City 1965, vol. I, Washington-London 1965, 27—29.
[9] A remark on incompletely specified automata. Information and Control **8** (1965), 373—376.
[10] Sur certaines varieties de monoides finis. In „Automata Theory", (E.R. Caianiello ed.) Academic Press Inc., New York (1966), 314—319.
[11] On a family of sets related to McNaughton's *L*-languages. In „Automata Theory" (E.R. Caianiello ed.) Academic Press Inc., New York (1966), 320—324.
SCHÜTZENBERGER, M.P.; CHOMSKY, N.
[1] The algebraic theory of context-free languages. In Computer Programming and Formal Systems, Amsterdam, 1963.
SCOTT, D.
[1] Some definitorial suggestions for automata theory, J. Computer System Sci. **1** (1967), 187—212.
SEKI, S.; HIROSE, K.
[1] A remark on the theory of automata. Comment. Math. Univ. St. Pauli **11** (1963), 115—119.
СЕРЕБРЯНЫЙ, А. И.
[1] О событиях, передставимых о конечных автоматах. Успехи мат. Наук, **20** (1965), № 2 (122), 203—206.
SESHU, S.
[1] Mathematical models for sequential machines. IRE Nat. Convet. Rec. 7, No. 2 (1959), 4—16.
SESHU, S.; MILLER, R.E.; METZE, G.
[1] Transition matrices of sequential machines. IRE Trans. Circuit Theory CT-6 (1959), 5—12.
SHAMIR, E.
[1] On sequential languages. Z. Phonetik, Sprachwiss. Kommunikations-forsch., **18** (1965), 61—69.
[2] A representation theorem for algebraic and context-free power series in non-commuting variables. Information and Control, **11** (1967), 1—2.
SHANNON, E.C.
[1] A mathematical theory of communication. Bell System, Tech. J. **27** (1948), 379—423; 623—656.
[2] A universal Turing machine with two internal states. Automata Studies. Princeton, Univ. Press, Princeton, N.J. 1956, 129—153.

SHANNON, C.E.; McCARTHY, J. (eds.)

[1] Automata studies. Princeton, University Press, Princeton, N.J. 1956.

SHEPHERDSON, J.C.

[1] The reduction of two-way automata to one-way automata. IBM J. Res. Dev. 3 (1959), 198—200.

СИДРИСТЫЙ, Б. А.; МИШИН, А. Н.

[1] Об одном методе реализации автоматов в вычислительной среде. Сб. «Вычислительные системы». Труды симпозиума, Новосибирск, 1967.

SIMOVICI, D.A.; REISCHER, C.

[1] Linear Boolean Automata. An. şt. Univ. „Al. I. Cuza" Iaşi, Sect. I Mat. (N.S.) 16 (1970), 205—219.

[2] On the reduced form of the linear boolean automata. An. şt. Univ. „Al. I. Cuza" Iaşi, Sect. I a Mat. (N.S.) 16 (1970), 479—485.

[3] Cascades of linear Boolean Automata. An. şt. Univ. „Al. I. Cuza" Iaşi, Sect. I a Mat. (N.S.) 18 (1972), 235—242.

[4] On the realization of the automaton related to an extension of a semigroup. Bul. Inst. Politehn. Iaşi, 19 (23) (1973), sub tipar.

СКЛЯРЕВИЧ, А. П.

[1] Среднее время исправной работы конечного автомата. Автоматика и вычислительная техника (1966), № 15.

СКОРНЯКОВ, Л. А.

[1] Об одном классе автоматов (нервные сети) Проблемы кибернетики, Москва (1960), вып. 4.

SMULLYAN, R.M.

[1] Theory of formal systems. Princeton Univ. Press, Princeton, 1961.

СОКОЛОВ, О. Б.

[1] К построению функционального устойчивых автоматов. Сб. «Итоговая научная конференция Казанского ун-та», Казань, 1960.

[2] Метод синтеза автоматов с функционально устойчивой структурой, Сб. «Итоговая научная конференция Казанского ун-та», Казань, 1964.

СОРКИН Ю. И.

[1] Алгоритмическая разрешимость проблемы изоморфизма для автоматов. ДАН СССР (1961), 137, № 4.

[2] Теория определяющих соотношений для автоматов. Проблемы кибернетики, Москва (1963), вып. 9.

SOUKUP. J.

[1] Non-deterministic behavior of deterministic computer. Kybernetika (Praha) 4 (1968), No. 1, 1—5.

SPIRA, P.M.

[1] The time required for group multiplication. J. ACM, 16 (1969), 235—243.

SPIRA, P.M.; ARBIB, M.A.

[1] Computation times for finite groups, semigroups and automata. Proc. IEEE 8th Ann. Symp. Switching and Automata Theory (1967); 291—295.

СПИВАК, М. А.

[1] Новый алгоритм абстрактного синтеза автоматов. Теория автоматов Семинар 3 (1963) I, 3—43 (Киев).

[2] Трактовка теории автоматов методам теории отнолений. Пробл. кибернетики 12 (1964), 69—98.

[3] К методу анализа абстрактных автоматов с помощью уравнений в алгебре событий. Кибернетика (Киев) (1965), № 1.

[4] Алгебраическая характеристика вычислительной силы автомата. Кибернетика (Киев (1965), № 4, 1—11.

[5] Представление автоматных отображений регулярными выражениями. Кибернетика (Киев) (1965), № 6, 15—17.

[6] Алгоритм абстрактного синтеза автоматов для расширеного языка регулярных выражений. Изд. АН СССР Техн. киб. (1965), № I, 51—67.

[7] Разложение регулярного выражения по базису и его применения. ДАН СССР 162 (1965), № 3, 520—522.

[8] Некоторые свойства множества экспериментов автомата. Кибернетика (Киев) (1966), № 6, 1—7.

[9] К минимизации автомата Мура. Кибернетика (Киев) (1967), № 1, 5—6.

SRINIVASAN, C.V.

[1] State diagrams of linear sequential machines. J. Franklin Inst. 273 (1962), No.5, 383—418.

SRINIVASAN, C.V.; NARASIMHAN, R.

[1] On the synthesis of finite sequential machines. Proc. Indian Acad. Sci. 50 (1959), 68—82.

STĂNCIULESCU, F.S.

[1] Einige Bemerkungen zur Sequenziallogik der endlichen Automaten. Z. Math. Logik Grundl. Math. 11 (1965), 57—60.

[2] Sequential logic and its application to the synthesis of finite automata. IEEE Trans. Electr. Comp. EC-14 (1965), No. 6, 786.

STANLEY, R.J.

[1] Finite state representations of context-free languages. Quart. Prog. Rept. 76 MIT Res. Lab. Elect. (1965), 276—279.

STARKE, P.H.

[1] Über die Darstellbarkeit von Ereignissen in nich-initialen Automaten. Z. Math. Logik. Grundl. Math. 9 (1963), 315—319.

[2] The Imitation endlischer Medwedjew Automaten durch Nervennetze. Z. Math.Logic. Grundl. Math. 11 (1965), 241—248.

[3] Einige Bemerkungen über nicht-deterministische Automaten. Elektron. Informationsverarb. u. Kybernetik 2 (1966), 61—82.

[4] Eine Bemerkung über homogene Experimente. Elektron. Informationsverarb. u. Kybernetik 2 (1966), 257—259.

[5] Über Experimente an Automaten. Z. Math. Logik Grundl. Math. 13 (1967), 67—80.

[6] Hülleroperationen für nicht-deterministische Automaten. Elektron. Informationsverarb. u. Kybernetik 3 (1967), 283—294.

[7] Abstrakte Automaten. VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften Berlin, 1969.

STEARNS, R.E.

[1] A regularity test for pushdown machines. Information and Control, 11 (1967), 323—340.

STEARNS, R.E.; HARTMANIS, J.

[1] On the state assignment problem for sequential machines II. IRE Trans. Electr. Comp. EC-10 (1961), 593—603.

[2] Regularity preserving modifications of regular expressions. Information and Control, 6 (1963), 55—69.

STEARN, R.E.; HARTMANIS, J.; LEWIS, P.M.

[1] Hierarchies of memory limited computations. IEEE Conf. Record Switching Circ. Theory and Log. Des. (1965), 179—190.

СТЕФАНОК, В. Л.

[1] Пример задачи на коллективное поведение двух автоматов. Автоматика и Телемеханика 24 (1963), № 6.

СТОГНИЙ, А. А.

[1] Синтез абстрактного автомата по представляемому им событию. Журнал вычислительной математики и математической физики (1961) I, № 3.

SUCHESTON, L.

[1] Note on mixing sequences of events. Acta Math. Acad. Scient. Hung. 11 (1960), 3—4.

SUNAGA, T.

[1] Algebraic theory of the composition and decomposition of automata. RAAG Mem. Unifying Study Basic Probl. Engng. and Phys. Sci., Tokyo, 3 (1962), 495—510.

[2] An algebraic theory of the analysis and synthesis of automata. Mathematical Theory of Automata, Polytechnic Press, Brooklyn (N.J.) 1963, 385—414.

SZÁSZ, G.

[1] Introduction to lattice theory. Akadémiai Kiadó, Budapesta, 1963.

ШИШКОВ, Д. Б.

[1] Некоторые вопросы анализа и синтеза дискретных автоматов. Диссертация, АН УССР, Киев, 1967.

ШРЕЙДЕР, Ю, А.

[1] Задача динамического планирования и автоматы. Пробл. кибернетики 5 (1961), 31—47.

ШУКУРЯН, Ю. Г.

[1] Об оптимизации автоматов с заключительным состоянием без циклов. Кибернетика (Киев) (1967), № 2, 27—35.

ТАЛЬ, А. А.

[1] Анкетный язык и абстрактный синтез минимальных последовательностных машин. Атом. и Телемех. 25 (1964) № 6, 946—962.

THATCHER, J.W.

[1] Notes on mathematical automata theory. Univ. Mich. Coll. Liter. Sci. and Arta Commun. Sci. Program. Techn. Note Ann. Arbor 1963.

[2] Universality in the von Neumann cellular model. University of Michigan Technical Report 1965.

THATCHER, J.W.; WRIGHT, J.B.

[1] Generalized finite automata theory with an application to a decision problem of second order logic. IBM Research Paper RC-1713 (1966).

[2] Generalized finite automata theory with application to a decision problem of second-order logic, Math. Systems Theory 2 (1968), 57—81.

THIERRIN, G.
[1] Permutation automata. Math. Systems Theory **2** (1968), 83—90.
TIXIER, V.
[1] Recursive functions of regular expressions in language analysis. Dissertation, Stanford Univ. 1967.
ТОЛЧАН, А. Я.
[1] Об одном способе оптимизации структуры сети связи. Сб. Проблемы передачи информации **11** (1962), **15** (1963)
TRACEY, J.H.
[1] Internal state assignment for asynchronous sequential machines. IEEE Trans. Electr. Comp. EC-15 (1966), 551—560.
ТРАХТЕНБРОТ, Б. А.
[1] Об операторах, реализуемых в логических сетях. ДАН СССР (1957) **112**, № 6.
[2] К теории бесповторных контактных схем. Труды Матем. ин-та. им. В. А. Стеклова, Москва (1957). т. 51.
[3] Асимптотическая оценка сложности логических сетей с памятью. ДАН СССР (1959) **127**, № 2.
[4] Некоторые построения в логике одноместных предикатов. ДАН СССР (1961), **138**, № 2.
[5] Конечные автоматы и логика одноместных предикатов. ДАН СССР (1961), **140**, № 2.
ТРАХТЕНБРОТ, Б. А.; БАРЗДИНЬ, Я. М.
[1] Конечные автоматы (поведение и синтез), «Наука», Москва, 1970.
TRAUTH, C.A.
[1] Group-type automata. J. ACM 13 (1966), 170—175.
ТРОШИН, В. И.
[1] Алгебраический способ минимизации непольностью определенных последовательностных машин. Автоматика и Телемеханика (1965), № 12, 2176—2181.
TURING, A.M.
[1] On computable numbers, with an application to the Entscheidungsproblem. Proc. London Math. Soc., **42** (1936), 230—265. A corection, ibid, **43**, 544—546.
ЦЕТЛИН, М. Л.
[1] Некоторые задачи о поведений конечных автоматов. ДАН СССР **139** № 4, 830.
[2] Конечные автоматы и моделирование простейших форм поведения. Успехи Матем. Наук, **18** (1963), № 4 (112), 3—27.
[3] Замечание об игре конечного автомата с партенерам, исползующим смешанную стратегию, ДАН СССР **149** (1963), № 1, 52.
ЦЕТЛИН, М. Л.; КРЫЛОВ, В. .
[1] Примеры игр автоматов. ДАН СССР **149** (1963), № 2, 284.
[2] Об играх автоматах. Автоматика и Телемеханика **24** (1963), № 7.
ULLMAN, J.D.; HOPCROFT, J.E.
[1] Non-erasing stack automata. J. Computer System Sci., **1** (1967), 166—186.
VAIRAVAN, K.
[1] An exclusion principle for finite memory sequential machines. Information and Control **19**, (1971), 10—17.
VAISMAN, I.
[1] Fundamentele matematicii. Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1968.

ВАВИЛОВ, Е. Н.; ШИШКОВ, Д. Б.
[1] Анализ и синтез автоматов, заданных системой функций возбуждений и выходов. Кибернетика (Киев) (1967) № 4, 1—8.
VUČKOCIC, V.
[1] On a class of regular sets. Notre Dame J. of Formal Logic, 5 (1964), 113—124.
WALTER, H.
[1] Erweiterungen von linearen Automaten. Elektron. Informationsverarbeit. Kybernetik 5 (1969), 97—107.
WANG, H.
[1] A variant to Turing's theory of computing machines. J. ACM, 4 (1957), 63—92.
WEEG, G.P.
[1] Some group theoretic properties of strongly connected automata. Comp. Lab., Michigan State Univ. 1961 (preprint).
[2] The structure of an automaton and its operation-preserving transformation group. J. ACM 9 (1962), 345—349.
[3] The group and semi-group associated with automata. Mathematical Theory of Automata, Polytechnic Press, Brooklyn (N.J.) 1963, 257—266.
[4] The automorphism group of the direct product of strongly related automata. J. ACM 12, (1965), 187—195.
WINOGRAD, S.
[1] Coding for logical operations. IBM J. Res. Dev. 6 (1962), 430—436.
[2] Bounded transient automata. Proc. AIEE 3rd Ann. Switching Theory Logical Design Symp. (1962), 138—141.
[3] Imput-error-limiting automata. J. ACM, 11 (1964), 338—351.
[4] On the time required to perform multiplication. J. ACM, 14 (1967), 793—802.
YAMADA, H.
[1] Counting by a class of growing automata. Doctoral Thesis, University of Pennsylvania 1960.
[2] Disjunctively linear logical nets. IRE Trans. Electr. Comp. EC-11 (1962), 629—639.
[3] Real-time computation and recursive functions not real-time computable. IRE Trans. Electr. Comp. EC-11 (1962), 753—760.
YAMADA, H.; AMOROSO, S.
[1] Structural and behavioral equivalences of tessellation automata, Information and Control 18 (1971), 1—31.
YAU, S.S.
[1] Autonomous clocks in sequential machines. IEEE Trans. Electr. Comp. EC-14 (1965), 467.
YAU, S.S.; WANG, K.S.
[1] Linearity of sequential machines. IEEE Trans. Electr. Comp. EC-15 (1966), 337—354; Corrections: EC-15, No. 5, 749; No. 6; 926.
YEH, R.T.
[1] On relational homomorphisms of automata. Information and Control, 13 (1968), 140—155.
YOELI, M.
[1] The cascade decomposition of sequential machines. IRE Trans. Electron. Comp. EC-10 (1961), 587—592.
[2] Decompositions of finite automata. Technion, Israel Inst. Technology, Tech. Rept. 10, March, 1963.

[3] Cascade-parallel decompositions of sequential machines. IEEE Trans. Electr. Comp. EC-12 (1963), 322—324.
[4] Lattice ordered semi-groups, graphs, and automata. MRC Tech. Rept. No. 451, Jan., 1964.
[5] Generalized cascade decompositions of automata. J. ACM 12 (1965), 411—422.
[6] Canonical representation of chain events. Information and Control, 8 (1965), 180—189.
YOELI, M.; GINZBURG, A.
[1] On homomorphic images of transition graphs. J. Franklin Inst. 278 (1964), 291—296.
YOUNGER, D.H.
[1] Recognition and parsing of context-free languages in time n^3. Information and Control, 10 (1967), 189—208.
ZADEH, L.A.; DESOER, C.A.
[1] Linear system theory. McGraw Hill Book Co., New York 1963.
ЗАКРЕВСКИЙ, А. Д.
[1] Метод синтеза функционального устойчивых автоматов. ДАН СССР, 129 (1959), № 4.
[2] К синтезу последовательностных автоматов. Тр. Сибирск. Физ. тех. ин-та при Томском ун-те 40 (1961), 89—94.
[3] О сокращении переборов при решении некоторых задач синтеза дискретных автоматов. Изв. вузов. Радиофизика 7, (1964), № 1.
ЗАКРЕВСКИЙ, А. Д.; ЯНКОВСКАЯ, А. Е.
[1] Практические алгоритмы кодирования внутренных состояний асинхронных автоматов. Автоматика и вычислительная техника (1969), № 3.
ZANDER, H.J.
[1] Zur Zustandsreduktion ungetakteter (asynchroner) Folgeschaltungen. Elektron. Informationsverarb. u. Kybernetik 4 (1968), 257—278; 285—300.
ZEIGER, H.P.
[1] Loop-free synthesis of finite state machines. Ph. D. Thesis, MIT, Cambridge, Mass, 1964.
[2] Cascade synthesis of finite state machines. Information and Control 10 (1967), 419—433.
[3] Yet another proof of the cascade decomposition theorem for finite automata. Math. Systems Theory 1 (1967), 225—228.
[4] Ho's algorithm. Information and Control, 11 (1967), 71—79.
[5] Cascade decomposition of automata using covers. In „The algebraic theory of machines, languages and semigroups" (M.A. Arbib, ed.) Academic Press, Inc., New York 1968, 55—80.
ZEIGLER, B.P.
[1] Automaton structure preserving morphism with applications to decomposition and simulation. In „Theory of machines and computations" (Z. Kohavi and A. Paz, eds), Academic Press, New York London, 1971, 295—309.

INDICE ALFABETIC

Absorbţie 12
acoperire de automate 88
„ slabă de automate 88
alfabet de ieşire 66
„ de intrare 66
algebră Boole 30
„ „ B_2 30
„ de asociere 213
„ „ slabă 220
„ unară ataşată unui automat 201
antisimetrie 14
aplicaţie 16
„ bijectivă 17
„ biunivocă 17
„ constantă 17
„ de acoperire 88
„ de condensare 111
„ de valuare 154
„ identică 17
„ injectivă 17
„ inversă 17
„ izotonă 18
„ surjectivă 17
arbore 23
arc într-un graf 21
aritatia unui operator 47
asociativitate 12
automat 66
„ ataşat unei algebre 203
„ „ „ aplicaţii 117
„ „ „ congruenţe 202
„ „ unui semigrup 120
automat autonom 66
„ binar 229
„ bistabil 180
„ canonic ataşat unui operator 127
„ cît 67
„ „ ataşat unei congruenţe 202
„ conex de o stare 73
„ cu identitate şi dirijare 180
„ cu permutare şi dirijare 183
„ cu restricţie 219
„ determinist 66
„ „ definit 161
„ „ k-definit 160
„ „ slab definit 161
„ „ „ k-definit 160
„ extins 189
„ finit 66
„ iniţial 66
„ ireductibil 122
„ k-stabil 159
„ Mealy 69
„ Moore 69
„ „ cu întîrziere 70
„ „ imediat 69
„ nedeterminist 66
„ neiniţial 66
„ redus 89
„ slab iniţial 66
„ „ k-stabil 159
„ strict iniţial 66
„ stabil 159
„ Starke 70
„ tare conex 73

automat tare ireductibil 122
„ „ redus 89
„ ultra redus 89
„ unidimensional al lui Neumann 138
„ Y-finit 66
automate asociate 95
„ echivalente 88
„ n-echivalente 88
axioma alegerii 20

Bijecție 17
bimorfism 33
bistabil 180
borna de ieșire 175
„ „ intrare 175
buclă într-un graf 22

Cardinal al unei mulțimi 21
cascadă de automate 107
categorie 32
categoria **Aut** 84
„ **Antd** 97
„ **Antf** 97
„ cît 43
„ cu produse directe 46
„ **Diag** ($\mathfrak{G}$, $\mathscr{C}$) 42
„ **Diag** ($\mathfrak{G}/K$, $\mathscr{C}$) 42
„ diagramelor 42
„ „ care satisface condiții de comutativitate 42
„ duală 33
„ **Ens** 35
„ $\mathbf{Ens}_0$ 35
„ **Funct** ($\mathscr{C}_1$, $\mathscr{C}_2$) 41
„ mică 33
„ **Ord** 35
circuit într-un graf 22
clasa morfismelor unei categorii 32
„ obiectelor unei categorii 32
cel mai mare element 15
„ „ „ „ într-o latice 29
„ „ mic element 15
„ „ „ „ într-o latice 29
clasă 20
„ de echivalență 14
codomeniul 16
coimaginea unei aplicații 17
complementarea unei mulțimi 12
complex 50
„ de conjugare la dreapta 51
„ „ „ „ stînga 51
componentă conexă 23
componentele unui morfism functorial 41
comutativitate 12
concatenare 59
condiție de comutativitate 37
congruență consistentă pe un automat 201
„ la dreapta pe un semigrup 48
„ pe o Δ-algebră 48
„ pe o latice 31
„ „ un automat 67
„ „ „ automat cu restricție 220
„ pe un semigrup 48
corestricția unei aplicații 17
cuvînt 58
cuvinte echivalente față de φ 117
„ „ în sens Myhill 110
„ „ în sens Nerode 110
„ k-echivalente față de φ 117

Descompunerea unui automat 238
Δ-algebră 47
diagramă comutativă 37
„ de tipul $\mathfrak{G}/K$ 37
„ de tipul $\mathfrak{G}$ în categoria $\mathscr{C}$ 36
„ de grupuri 54
„ unei mulțimi parțial ordonate 28
diferență de mulțimi 12
distributivitate 12
diviziune de aplicații 118
„ „ semigrupuri 111
„ „ „ condensate 111
divizor normal 51
domeniu de definiție 16
„ „ operatori 47
drum într-un graf 22

Echivalență indusă de o rețea abstractă și de o semisimulare 232
echivalență nucleară a unei aplicații 17

echivalenţe asociate 211
„ slab-asociate 220
element al unei mulţimi 11
„ complementar 29
„ indempotent 58
„ invers 49
„ maximal 15
„ minimal 15
„ neutru 49
„ unitate 49
„ „ într-un semigrup 58
„ zero 58
„ „ la dreapta 58
„ „ la stînga 58
epifunctor 40
epimorfism 33
eveniment 142
„ cert 142
„ imposibil 142
„ k-definit 164
„ regulat 145
„ reprezentat într-un semiautomat nedeterminat prin o mulţime de stări 148
„ reprezentat într-un sistem tranziţional 151
„ reprezentat prin o mulţime de stări 144
„ „ „ un semnal de ieşire 142
„ slab k-definit 164
evoluţie 66
„ admisibilă 66
experiment de specia I 167
„ de specia a II-a 167
experimente cu automate 165
expresie regulată 153
expresii regulate echivalente 154
extensia unui semigrup 189
extremitate finală 21
„ iniţială 21

Factorii unui şir normal 57
familie epimorfică 35
„ monomorfică 34
functor bijectiv 40
„ conservativ 40
functor constant 40
„ contravariant 39
„ covariant 39
„ deplin 40
„ „ fidel 40
„ de ştergere 40
„ fidel 40
„ identic 40
„ injectiv 40
„ surjectiv 40
funcţie caracteristică a unei mulţimi 18
„ de alegere 20
„ de ieşire 66
„ de marcare într-un graf 23
„ de răspuns 66
„ de trecere 66

Graf arborescent 23
„ asociat unui automat 71
„ ataşat operatorului secvenţial 131
„ conex 22
„ finit 21
„ infinit 21
„ marcat 23
„ orientat 21
„ tare conex 22
grup 49
„ abelian 49
„ ciclic 52
„ cît 52
„ factor 52
„ la dreapta 60
„ simplu 52
„ unui automat cu permutare şi dirijare 183
grupare în paralel 107
„ „ „ în sens Hartmanis-Stearns 108
„ „ serie 107
„ „ „ în sens Hartmanis-Stearns 108

Homomorfism de automate 95
„ „ Δ-algebre 47
„ „ latici 32
„ „ semigrupuri 48
„ injectiv 53
„ surjectiv 53
„ natural 53

Ideal 58
„ impropriu 58
„ într-un semigrup 58
„ la dreapta în un semigrup 58
„ la stînga în un semigrup 58
„ propriu 58
idempotență 25
imaginea aplicației 16
imagine 16
implicație de relații 13
indexare a unei mulțimi 18
indicele unui element 60
infimum 16
injecție 20
„ canonică 20
inversul unui complex 50
involutivitatea complementării 13
intersecție de mulțimi 12
izomorfism 33
„ de categorii 40
„ „ grupuri 53

Juxtapunere 59

Ker h 59
k-modul 175

Lanț 15
latice 25
„ complementară 30
„ distributivă 30
„ mărginită 29
„ modulară 30
lege de compunere pentru morfisme 32
limită proiectivă 44
„ „ a unei diagrame 44
lungimea unui cuvînt 58
„ „ procedeu 167
„ „ șir normal 57
limbajul expresiilor regulate 153
Macroautomat atașat unui automat 67
memoria unui operator 128
monofunctor 40
monoid 58
„ atașat unui semigrup 58
monomorfism 33
morfism de diagrame 42
„ functorial 41
„ identic 33
multigraf atașat unei categorii mici 34
„ orientat 22
mulțimea arcelor unui graf 21
„ de generatori pentru un semigrup 58
„ majoranților 15
„ minoranților 15
„ semigrupurilor care divid pe U_3 112
„ vidă 12
mulțime 11
„ cît 14
„ închisă de componente ale unei rețele 237
„ parțial ordonată 15
„ neredondantă de echivalențe 239
„ total ordonată 15
mulțimi de stări echivalente 84
mulțimi de stări n-echivalente 84

N-acoperire de automate 88
n- „ slabă de automate 88
n-separabilitate 86
n-semiseparabilitate 86
nucleul unei aplicații 17
„ unui homomorfism 53

Obiect final 34
„ inițial 34
„ nul 34

operator 47
„ constant 47
„ de închidere 24
„ „ „ complexă 148
„ „ „ prin prefixe 148
„ fără memorie 131
„ lui Hartmanis și Stearns 212
„ nedeterminist 129
„ nedeterminist realizabil într-un automat 129
„ „ secvențial 130
„ „ semisecvențial 130
„ pe (I_1, I_2) 125
„ realizabil într-un automat 126
„ secvențial 126
„ „ k-stabil 163
„ „ slab k-stabil 163
„ semisecvențial 126
„ slab al lui Hartmanis-Stearns 220
operatori k-echivalenți 132
„ k-separabili 132
operație binară 18
„ internă 18
„ n-ară 18
orologiu 241

Parte a unei mulțimi 12
perechi extremale 214
perioada unui automat autonom 242
„ tranzitorie a unui automat autonom 242
„ unui element 60
predecesor al unei stări 68
„ imediat al unei stări 68
„ unic 74
preimagine 16
principiul dualității în teoria categoriilor 34
principiul dualității în teoria laticilor 26
produs cartezian 13
„ de categorii 36
„ „ complexe 50
„ „ de evenimente 148
produs de relații 13
„ direct al unei familii de obiecte 46
„ „ de automate 108
„ „ „ Δ-algebre 47
„ „ „ semigrupuri 61
produs Huzino de automate 109
„ nodal de semigrupuri 112
„ semidirect de semigrupuri 112
proiecția canonică a categoriei cît 43
„ j a unei relații n-are 13
„ canonică 20
proprietatea de universalitate a limitei proiective 44
„ lui De Morgan 31
„ decidabilă 86
proprietăți de congruență relativ la o algebră de asociere 217
puterea de accesibilitate a unui automat 140
„ de accesibilitate a unui operator 140
„ „ separabilitate a unui automat 140
„ „ separabilitate a unui operator 140

Reflexivitate 14
relație binară 13
„ complementară 14
„ de admisibilitate 219
„ de asociere $I—O$ 221
„ de asociere $I—S$ 221
„ de asociere $S—O$ 221
„ de asociere $S—S$ 221
„ de asociere slabă a echivalențelor 220
„ de congruență 67
„ de conjugare după un subgrup 51
„ de conjugare la dreapta după un subgrup 51
„ de conjugare la stînga după un subgrup 51
„ de echipotență 20
„ „ ordine parțială 15
„ „ ordonare structurală 106
„ „ precedență 237

relație de trecere 151
„ „ tranziție spontană 150
„ identică 14
„ inversă 14
„ n-ară 13
„ totală 14
„ vidă 13
restabilire 74
restricția unei aplicații 17
retractă 33
rețea abstractă 231
„ „ cu întîrziere 231
„ „ normală 231
„ „ „ fără circuite 238
„ de k-module 176
„ modulară 176
reuniune de mulțimi 12
„ disjunctă 13
reversibilitate 74
„ parțială 74
„ potențială 74

Schema unei diagrame 36
secțiune 33
semiautomat 67
„ atașat unui automat 67
„ „ unei congruențe la dreapta 105
„ cu restricție 219
„ local 235
„ Medvedeev 70
„ determinist atașat unui sistem tranzițional 152
semigrup 48
„ atașat unei aplicații 110
„ „ unui automat 120
„ ciclic 61
„ cît 59
„ condensat 111
„ „ atașat unui automat 120
semigrup factor 59
„ ireductibil 112
„ liber 59
„ nul la dreapta 60
„ simplu 59
„ „ la dreapta 59
„ „ „ stînga 59
semigrupul U_3 112
semilatice 27
„ conjunctivă 27
„ disjunctivă 27
semirestabilire 74
semiseparabilitate 86
semisimulare 207
separabilitate 86
simboli de marcare 23
simetrie 14
simulare de automate 95
„ „ semiautomate 106
sistem de închidere 23
„ proiectiv 45
„ tranzițional 150
spectrul de accesibilitate al unui automat într-o stare 136
spectrul de accesibilitate al unui operator secvențial 133
spectrul de separabilitate al unei perechi de alfabete 132
spectrul de separabilitate al unui automat 137
spectrul de separabilitate al unui operator secvențial 133
stare accesibilă 73
„ a operatorului 126
„ k-accesibilă 73
„ strict k-accesibilă 73
starea operatorului nedeterminist 130
stări echivalente 88
„ n-echivalente 84
subalgebră 47
„ proprie 47
subautomat 67
„ conex atașat unei stări 73
subcategorie 32
„ plină 32
subgrup impropriu 52
„ normal 51
„ propriu 52

sublatice 27
submulţime 12
„ strictă 12
subsemigrup 57
succesor al unei stări 68
„ imediat al unei stări 68
suma directă a unei familii de obiecte 46
„ „ de automate 108
supercategorie 33
suportul unei Δ-algebre 47
suprasimularea completă de automate 211
„ de automate 207
„ injectivă de automate 207
supremum 16
surjecţie 17

Şir de compoziţie 57
„ normal de subgrupuri 57

Teorema de factorizare a aplicaţiilor 38
„ I de izomorfism 55
teorema a II-a de izomorfism 55
„ lui Hartmanis-Stearns de structură a automatelor finite 240
„ lui Krohn-Rhodes de structură a automatelor finite 200
termenii unui şir normal 57
tip de structură 106
tranzitivitate 14

𝔘-categorie 32
unitate la dreapta într-un semigrup 58
„ „ stînga într-un semigrup 58
univers 18
urma unei relaţii pe o submulţime 15

Vîrf într-un graf 21

TABLA DE MATERII

Prefaţă 5
Lista de notaţii principale 7

Partea I Elemente de algebră

§ I.0. Introducere 11
§ I.1. Mulţimi şi relaţii 11
§ I.2. Aplicaţii 16
§ I.3. Noţiunea de univers 18
§ I.4. Noţiunea de graf 21
§ I.5. Sisteme de închidere şi operatori de închidere 23
§ I.6. Noţiuni de teoria laticilor 25
§ I.7. Noţiunea de categorie 32
§ I.8. Functori 39
§ I.9. Limite proiective 43
§ I.10. Noţiuni de algebră universală 47
§ I.11. Noţiuni de teoria grupurilor 50
§ I.12. Noţiuni de teoria semigrupurilor 37

Partea a II-a Teoria automatelor

§ II.0. Introducere 65
§ II.1. Noţiunea de automat 66
§ II.2. Extinderea funcţiilor de trecere şi de ieşire 68
§ II.3. Modele de automate 69
§ II.4. Reprezentarea automatelor prin grafuri 71
§ II.5. Relaţii de echivalenţă pe mulţimi de stări 84
§ II.6. Echivalenţe de automate 88
§ II.7. Homomorfisme de automate 95
§ II.8. Operaţii cu automate şi laticea semiautomatelor 107
§ II.9. Semigrupuri şi automate deterministe 110
§ II.10. Operatori pe semigrupuri 125
§ II.11. Proprietăţi spectrale ale automatelor deterministe finite şi ale operatorilor secvenţiali deterministi 132
§ II.12. Caracteristici numerice ale automatelor deterministe finite şi ale operatorilor secvenţiali 140
§ II.13. Evenimente şi reprezentarea lor în automate finite 142
§ II.14. Sisteme tranziţionale şi expresii regulate 150
§ II.15. Proprietăţi de stabilitate în automate 159
§ II.16. Experimente cu automate 165

Partea a III-a Probleme speciale de teoria automatelor

§ III.0. Introducere 175
§ III.1. Simularea automatelor deterministe finite cu ajutorul reţelelor modulare 175
§ III.2. Componente de bază ale automatelor finite 180
§ III.3. Teorema lui K.Krohn şi I.L.Rhodes 185
§ III.4. Congruenţe pe mulţimea de stări a unui automat determinist 201
§ III.5. Descompunerea în serie şi în paralel în sens Hartmanis-Stearns a automatelor deterministe 206
§ III.6. Echivalenţe asociate pe un automat determinist şi algebre de asociere 211
§ III.7. Alte algebre de asociere ataşate unui automat 221
§ III.8. Codificarea automatelor 226
§ III.9. Reţele abstracte 231
§ III.10. Metode laticiale de descompunere a automatelor finite 237
§ III.11. Proprietăţi laticiale ale automatelor autonome 241

Bibliografie 245

Indice alfabetic 285

CONTENTS

— Preface 5
— List of main notations 7

I. Elements of Algebra

§ I.0. Introductions 11
§ I.1. Sets and relations 11
§ I.2. Mappings 16
§ I.3. The notion of universe 18
§ I.4. The notion of graph 21
§ I.5. Closure systems and closure operators 23
§ I.6. Notions of lattice theory 25
§ I.7. The notion of cathegory 32
§ I.8. Functors 39
§ I.9. Projective limits 43
§ I.10. Notions of universal algebra 47
§ I.11. Notions of group theory 50
§ I.12. Notions of semigroup theory 57

II. Automata theory

§ II.0. Introduction 65
§ II.1. The notion of automaton 66
§ II.2. The extension of next-state and output functions 68
§ II.3. Models of automata 69
§ II.4. The representation of automata by graphs 71
§ II.5. Equivalences on sets of states 84
§ II.6. Equivalence of automata 88
§ II.7. Automata homomorphisms 95
§ II.8. Operations with automata and lattices of semiautomata 107
§ II.9. Deterministic automata and semigroups 110
§ II.10. Operators on semigroups 125
§ II.11. Spectral properties of deterministic automata and sequential operators 132
§ II.12. Numerical caracteristics of deterministic finite automata and sequential operators 140
§ II.13. Events and their representation in finite automata 142
§ II.14. Transitional systems and regular expressions 150
§ II.15. Stability properties of automata 159
§ II.16. Experiments with automata 165

III. Special topics in automata theory

§ III.0. Introduction 175
§ III.1. Simulation of deterministic automata by modular networks 175
§ III.2. Basic components of finite automata 180
§ III.3. The theorem of K.Krohn and I.L. Rhodes 185
§ III.4. Congruences on the set of the states of a deterministic automaton 201
§ III.5. Serial and paralel decomposition of finite automata in sense of Hartmanis and Stearns 206
§ III.6. Associated equivalences on a deterministic automaton and pair algebras 211
§ III.7. Other pair algebras related to an automaton 221
§ III.8. Codification of automata 226
§ III.9. Abstract networks 231
§ III.10. Latticial methods for decomposition of finite automata 237
§ III.11. Latticial properties of autonomous automata 241

References 245

Alphabetic index 285

TABLE DES MATIÈRES

— Préface 5
— Liste des symboles usuels 7

Première partie. Elèments d'algèbre

§ I.0. Introduction 11
§ I.1. Ensembles et relations 11
§ I.2. Applications 16
§ I.3. La notion d'univers 18
§ I.4. La notion de graphe 21
§ I.5. Systèmes de fermeture et opérateurs de fermeture 23
§ I.6. Notions de la théorie des treills 25
§ I.7. La notion de catégorie 32
§ I.8. Foncteurs 39
§ I.9. Limites projectives 43
§ I.10. Notions d'algèbre universelle 47
§ I.11. Notions de la théorie des groupes 50
§ I.12. Notions de la théorie des semigroupes 57

Deuxiéme partie. Théorie des automates

§ II.0. Introduction 65
§ II.1. La notion d'automate 66
§ II.2. L'extension des fonctions de transition et de sortie 68
§ II.3. Modèles d'automates 69
§ II.4. La représentation des automates par graphes 71
§ II.5. Relations d'équivalence sur des ensembles d'états 84
§ II.6. Equivalences d'automates 88
§ II.7. Homomorphisme d'automates 95
§ II.8. Opérations sur automates et treillis de semiautomates 107
§ II.9. Semigroupes et automates déterministes 110
§ II.10. Opérateurs sur semigroupes 125
§ II.11. Propriétés spectrales des automates déterministes et des opérateurs séquentiels 132
§ II.12. Caractéristiques numériques des automates déterministes finis et des opérateurs séquentiels 140
§ II.13. Evénements et leurs représentation dans les automates finis 142
§ II.14. Systèmes transitionaux et expressions régulières 150
§ II.15. Propriétés de stabilité dans automates 159
§ II.16. Expériences avec automates 165

Troisiéme partie. Problemes speciaux de la théorie des automates

§ III.0. Introduction 175
§ III.1. La simulation des automates déterministes finis à l'aide des rèseaux modulaires 175
§ III.2. Composantes essentielles des automates finis 180
§ III.3. Le théorème du L.Krohn et J.L. Rhodes 285
§ III.4. Congruences sur l'ensemble d'états d'un automate déterministe 201
§ III.5. La décomposition en série et en parallèle des automates dèterministes après Hartmanis et Stearns 206
§ III.6. Equivalences associées sur un automate déterministe et algèbres d'association 211
§ III.7. D'autres algèbres d'asociation liées d'un automate 221
§ III.8. Le codage des automates 226
§ III.9. Rèseaux abstraits 231
§ III.10. Méthodes latticielles de décomposition des automates finis 237
§ III.11. Propriétés latticielles des automates autonomes 241

Bibliografie 245

Index alphabétique 285

ОГЛАВЛЕНИЕ

— Предисловие 5
— Список главных обозначений 7

Часть первая — Апгебранческие понятия

§I.0 — Введение 11
§I.1 — Множества и отношения 11
§I.2 — Отображения 16
§I.3 — Понятие универс 18
§I.4 — Понятие графа 21
§I.5 — Системы замыканий и операторы замыкания 23
§I.6 — Понятия теории структуры 25
§I.7 — Понятие категории 32
§I.8 — Функторы 39
§I.9 — Проективные переделы 43
§I.10 — Понятия универсальной алгебры 47
§I.11 — Понятия теории групп 50
§I.12 — Понятия теории полугрупп 57

Часть вторая — Теория автоматов

§II.0 — Введение 65
§II.1 — Понятие автомата 66
§II.2 — Распространение переходных и выходных функций 68
§II.3 — Модели автоматов 69
§II.4 — Представление автоматов подсредством графов 71
§II.5 — Отношение эквивалентности над множеством состояний 84
§II.6 — Эквивалентности автоматов 88
§II.7 — Гомоморфизмы автоматов 95
§II.8 — Операции с автоматами и структуры полуавтоматов 107
§II.9 — Полугруппы и детерминированые автоматы 110
§II.10 — Операторы над полугруппами 125
§II.11 — Спектральные свойства конечных детерминированых автоматов и последовательных операторов 132
§II.12 — Числовые данные конечных детерминированных автоматов и последовательных операторов 140
§II.13 — События и их представления в кочечных автоматах 142
§II.14 — Переходные системы и регулярные выражения 150
§II.15 — Свойства устоичивости в автоматах 159
§II.16 — Опыты с автоматами 165

Часть третья — Специяльные вопросы теории автоматов

§III.0 — Введение 175
§III.1 — Моделирование конечных детерминированных автоматов с помощью модулярных сетей 175
§III.2 — Основные части конечных автоматов 180
§III.3 — Теорема К. Крона и Дж. Л. Роудза 185
§III.4 — Конгруэнтности над множеством состояний детерминированого автомата 201
§III.5 — Последовательное и паралельное разложение детерминированых автоматов по Гартманису-Стэрнсу 206
§III.6 — Асоцированные эквивалентности в детерминированом автомата и алгебры пар 211
§III.7 — Другие алгебры пар связанные с автоматом 221
§III.8 — Кодирование автоматов 226
§III.9 — Абстрактные сети 231
IIII.10 — Структурные методы разложения конечных автоматов 237
§II.11 — Структурные своиства автономных автоматов 241

Библиография 245

Алфавитный указатель 285

REDACTOR, **MIHAIL GRĂDINARU**
TEHNOREDACTOR, **MIHAI BUJDEI**

APĂRUT ÎN 1973. FORMAT 70×100/16. COLI TIPAR 18,75
TIRAJ: 8400 EX. BROŞATE
EDITURA JUNIMEA
PALATUL CULTURII IAŞI
ROMÂNIA

TIPARUL EXECUTAT LA ÎNTREPRINDEREA
POLIGRAFICĂ 13 DECEMBRIE 1918
BUCUREŞTI

C.T.C. — 8
CUSUT

EDITURA JUNIMEA
IAȘI

13 50

Lei ~~18~~